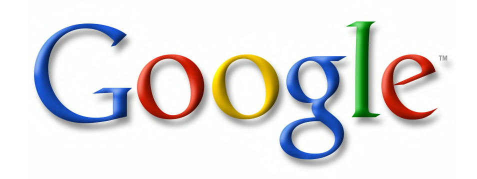
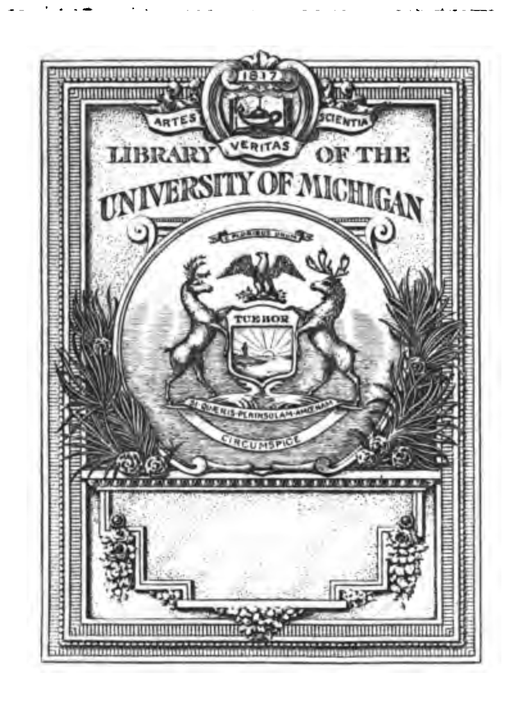



1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE,

PUBLIÉE

PAR A. QUETELET,

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE DE BRUXELLES, PROFESSEUR AU MUSÉE; MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES, ET DE L'INSTITUT DES PAYS-BAS; ASSOCIÉ LIBRE ÉTRANGER DE LA SOCIÉTÉ DE STATISTIQUE DE PARIS, DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATIQUE DE LA MÊME VILLE, DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE DE LONDRES, DE L'ACADÉMIE ROYALE DE TURIN; DES SOCIÉTÉS DES SCIENCES NATURELLES ET MÉDICALES DE HEIDELBERG ET DE WURZBOURG; DES SOCIÉTÉS DE GAND, LIÉGE, ROTTERDAM, LA HAYE, UTRECHT, CAMBRAI.

TOME VI.



BRUXELLES,
M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE DE BRUXELLES,
RUE DE LA MONTAGNE, N° 10.

1830.

CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

SECOND MÉMOIRE

Sur la transformation parabolique des relations métriques des figures (*), par M. Chasles, ancien élève de l'École Polytechnique. (*Voyez le volume précédent.*)

I.

SUR LES DIAMÈTRES, LES PLANS-DIAMÈTRES, LES AXES, LES PÔLES ET LES CENTRES DES COURBES ET DES SURFACES GÉOMÉTRIQUES.

(1) Nous allons prendre, pour nouvelle application de notre principe de transformation des relations métriques, la propriété générale suivante des courbes géométriques, donnée par *Newton*, dans son *Enumeratio linearum tertii ordinis :* « Si l'on » mène dans le plan d'une courbe géométrique une série de » transversales parallèles à un axe fixe, et qu'on prenne sur » chacune d'elles le centre des moyennes distances des points » où cette droite rencontre la courbe, tous ces points seront » sur une même droite. » On a appelé cette droite *diamètre* de la courbe. (V. *Enumeratio linearum*, et l'*Encyclopédie*, art. Courbe.)

Chaque courbe a ainsi une infinité de *diamètres*, dont chacun répond à une droite donnée de direction. Nous dirons que

(*) Ce second mémoire sur les transformations paraboliques a été adressé avec le premier, le 7 mars, à l'Académie royale de Bruxelles, qui en a ordonné l'insertion dans le recueil de ses Mémoires.

chaque diamètre est *conjugué* à la droite à laquelle il répond.

Comme cette belle propriété des courbes géométriques, est la base de toutes les recherches contenues dans ce mémoire, nous allons en rappeler une démonstration qui est une conséquence immédiate de la théorie générale des équations.

L'équation de la courbe, rapportée aux axes des x et des y, et ordonnée par rapport à x, est de la forme :

$$x^m + (ay + b)\, x^{m-1} + \ldots + k = o.$$

La somme des abscisses des points où une parallèle à l'axe des x rencontre la courbe, est égale au coefficient du second terme, pris en signe contraire, c'est-à-dire à $-(ay + b)$; l'abscisse du centre des moyennes distances de tous ces points est donc $x = -\frac{ay+b}{m}$; l'ordonnée de ce point est y; cette équation représente donc le lieu géométrique du centre des moyennes distances des points où une transversale quelconque parallèle à l'axe des x rencontre la courbe; or, cette équation est du premier degré; ce lieu géométrique est donc une ligne droite; ce qui démontre le théorème énoncé.

Plusieurs des points où chaque transversale rencontre la courbe, et même tous ces points, si l'équation de la courbe est d'un degré pair, peuvent être imaginaires; mais, la somme de leurs abscisses étant toujours réelle, le centre des moyennes distances de tous ces points sera toujours réel.

(2) On déduit du théorème précédent, cette propriété générale des surfaces géométriques :

« Si l'on a une surface géométrique et qu'on mène une série
» de transversales parallèles à un axe fixe, puis qu'on prenne
» sur chacune d'elles le centre des moyennes distances des
» points où elle rencontre la surface, tous ces centres seront
» sur un même plan. »

En effet, considérons les transversales qui se trouvent dans un même plan; les centres situés sur ces transversales seront sur une même droite (1); ainsi tout plan parallèle aux transver-

sales rencontre la surface lieu des centres des moyennes distances suivant une droite; ce qui prouve que cette surface est un plan.

Nous appellerons ce plan *plan-diamètre conjugué* à l'axe fixe, auquel les transversales sont parallèles.

(3) On déduit aussi du théorème de *Newton*, une propriété générale des courbes géométriques à double courbure, que voici :

« Si l'on a une courbe géométrique à double courbure,
» qu'on mène une série de plans parallèles à un plan fixe,
» et qu'on prenne le centre des moyennes distances des points
» où chaque plan rencontre la courbe, tous ces centres seront
» sur une même droite. »

En effet, projetons la courbe sur un plan quelconque par des droites toutes parallèles entre elles, et parallèles au plan fixe. La projection de la courbe sera une courbe géométrique, la trace de chaque plan transversal sur le plan de projection, rencontrera cette courbe en des points A′, B′, C′, ... qui seront les projections des points A, B, C, ... où le plan transversal rencontre la courbe à double courbure; le centre des moyennes distances des points A′, B′, C′, ... sera la projection du centre des moyennes distances des points A, B, C, ...; or, quand le plan transversal se mouvra parallélement à lui-même, sa trace sur le plan de projection se mouvra parallélement à elle-même; le centre des moyennes distances des points A′, B′, C′ .... engendrera donc une droite (1); ainsi la ligne lieu des centres des moyennes distances des points où les plans parallèles rencontrent la courbe à double courbure, a pour projection sur un plan quelconque une ligne droite; ce qui prouve que cette ligne est elle-même une droite.

Nous appellerons cette droite *axe* de la courbe *conjuguée* au plan fixe.

(4) Quand plusieurs droites sont dans un même plan, on peut les regarder comme formant une courbe géométrique; ces droites auront donc une infinité de *diamètres*, dont chacun sera *conjugué* à une droite donnée de direction.

L'existence de ce diamètre, dans le cas particulier d'un système de droites, est aussi une conséquence du principe de la conservation du mouvement du centre de gravité.

Toutes les droites peuvent converger vers un même point, alors tous leurs diamètres passeront par ce point.

Si toutes les droites sont parallèles entre elles, elles n'auront qu'un seul diamètre, qui leur sera parallèle.

(5) On peut regarder comme une surface géométrique, l'ensemble de plusieurs plans disposés d'une manière quelconque dans l'espace. Ces plans auront une infinité de *plans-diamètres*, *conjugués* respectivement à des axes donnés.

Si tous les plans passent par un même point, tous leurs plans-diamètres passeront par ce point.

Si tous les plans passent par une même droite, tous leurs plans-diamètres passeront par cette droite; et il est clair qu'alors toutes les droites situées dans un même plan fixe mené par cette droite, auront même plan-diamètre conjugué; par cette raison nous dirons que le plan-diamètre est *conjugué* au plan fixe.

Si tous les plans sont parallèles entre eux, ils n'auront qu'un seul plan-diamètre, qui leur sera parallèle.

(6) Enfin, on peut regarder comme une courbe géométrique à double courbure, un système de droites disposées d'une manière quelconque dans l'espace; ces droites auront une infinité d'*axes*, *conjugués* respectivement à des plans donnés de direction.

Si toutes les droites passent par un même point, tous leurs axes passeront par ce point.

Si toutes les droites sont parallèles entre elles, elles n'auront qu'un seul axe, qui leur sera parallèle.

(7) Reprenons le théorème de *Newton;* menons à la courbe ses tangentes aux points où une des transversales la rencontre; le diamètre de ce système de tangentes, conjugué à la direction des transversales, passera par le centre des moyennes distances des points où la transversale qu'on considère rencontre la courbe; mais si l'on conçoit une seconde transversale infiniment voisine de la première, et qui lui soit parallèle,

elle rencontrera la courbe en des points infiniment voisins des points de rencontre par la première transversale, ces points appartiendront aussi aux tangentes ; donc le diamètre de ce système de tangentes, passera aussi par le centre des moyennes distances des points de rencontre de la courbe par la seconde transversale; ce qui prouve que ce diamètre des tangentes se confond avec le diamètre de la courbe; donc :

« Si dans le plan d'une courbe géométrique, on tire par un » point quelconque une transversale parallèle à un axe fixe, » et qu'on mène les tangentes à la courbe aux points où la » transversale la rencontre, le diamètre de ces tangentes con- » jugué à l'axe fixe, se confondra toujours avec le diamètre de » la courbe conjugué à cet axe. »

(8) On conclut de là le théorème analogue relatif aux sufaces ; savoir :

« Si, ayant une surface géométrique, on tire une série de » transversales parallèles à un axe fixe, et qu'on conçoive les » plans tangens à la surface aux points où une quelconque des » transversales la rencontre, le plan-diamètre de ces plans tan- » gens, conjugué à la direction de l'axe fixe, sera toujours » le même quelle que soit cette transversale; ce sera le plan- » diamètre de la surface, conjugué à l'axe fixe. »

Car d'après le théorème précédent, tout plan mené par la transversale rencontrera le plan-diamètre des plans tangens et celui de la surface suivant la même droite, ce qui prouve que ces deux plans se confondent.

(9) Enfin : « Si ayant une surface géométrique à double » courbure, on mène une série de plans parallèles à un plan » fixe, et qu'on conçoive les tangentes à la courbe aux points » où un quelconque de ces plans la rencontre, l'axe de ce » système de tangentes, conjugué au plan fixe, sera toujours » le même quel que soit le plan transversal; ce sera l'axe de » la courbe, conjugué au plan fixe. »

En effet, deux plans transversaux infiniment voisins, intercepteront sur la courbe des élémens qui appartiendront à un système de tangentes; et l'axe de ces tangentes passera, comme

l'axe de la courbe, par les centres des moyennes distances des points où les deux plans rencontrent la courbe; ainsi ces deux axes se confondent.

(10) Appliquons maintenant la méthode des transformations paraboliques aux théorèmes que nous venons d'exposer; nous obtiendrons sans peine un grand nombre d'autres propriétés générales, tout-à-fait différentes et nouvelles, des courbes et des surfaces géométriques.

II.

COURBES PLANES.

(11) Lemme. *Quand on a un système de points en ligne droite, et leur centre des moyennes distances, si l'on fait la transformation parabolique, on aura un système de droites concourant en un même point, et le* diamètre *de ces droites, conjugué à la direction de l'axe de la parabole auxiliaire.*

En effet soient A, B, C, ... les points, et O leur centre des moyennes distances; on aura :

$$OA + OB + OC + \ldots = o.$$

A ces points correspondront des droites a, b, c, ... et o, passant toutes par un même point; soient ω, β, γ, ... et ω les points où ces droites rencontrent l'axe X de la parabole, on aura :

$$\omega\alpha = OA \cos. (OA, X),$$
$$\omega\beta = OB \cos. (OB, X),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les points étant en ligne droite, tous les cosinus sont égaux, l'équation ci-dessus devient donc :

$$\omega\alpha + \omega\beta + \omega\gamma + \ldots = o;$$

ce qui prouve que le point ω, est le centre des moyennes di-

stances des points α, β, γ, ..., et que par conséquent, la droite o est le diamètre des droites a, b, c, ..., conjugué à la direction de l'axe de la parabole. C. Q. F. D.

(12) D'après cela, appliquons la transformation parabolique au théorème de *Newton;* nous aurons une seconde courbe géométrique; à chaque transversale correspondra au point situé sur une droite fixé parallèle à l'axe de la parabole; aux points où la transversale rencontre la courbe, correspondront les tangentes à la seconde courbe menées par ce point, et au centre des moyennes distances de ces points, correspondra le diamètre de ces tangentes, conjugué à la direction de l'axe de la parabole (lemme); ce diamètre passera par un point fixe correspondant au diamètre lieu des centres des moyennes distances situés respectivement sur les transversales. On a donc ce théorème :

Si l'on a une courbe plane géométrique et une droite fixe tracée dans son plan, et que par chaque point de cette droite, on mène un faisceau de tangentes à la courbe, et le diamètre *de ce faisceau*, conjugué *à la droite fixe* (4), *tous ces diamètres passeront par un même point.*

Plusieurs des tangentes menées à la courbe par un même point peuvent être imaginaires, et néanmoins le diamètre de ces tangentes, conjugué à une droite donnée, est toujours réel, par la raison que dans le théorème de *Newton*, plusieurs des points d'intersection de chaque transversale avec la courbe peuvent être imaginaires, et que néanmoins le centre des moyennes distances de ces points est toujours réel, ainsi que nous en avons fait la remarque (1).

Quand, dans le théorème précédent, la courbe est une conique, le point par où passent les diamètres des faisceaux de tangentes issues des différens points de la droite fixe, est évidemment le *pôle* de cette droite par rapport à la conique; par cette raison nous appellerons aussi ce point, dans le cas d'une courbe géométrique quelconque, le *pôle* de la droite fixe par rapport à cette courbe.

Ainsi le *pôle* d'une droite, pris par rapport à une courbe

géométrique donnée, est un point conique par où passent les diamètres de tous les faisceaux de tangentes à la courbe menées des différens points de la droite, ces diamètres étant conjugués à cette droite : c'est-à-dire, que si l'on mène une parallèle à la droite, le diamètre de chaque faisceau de tangentes passera par le centre des moyennes distances des points où cette parallèle rencontrera les tangentes de ce faisceau.

(13) Si la droite fixe est à l'infini, les tangentes de chaque faisceau seront parallèles entre elles ; on a donc ce théorème :

Si l'on mène à une courbe géométrique toutes ses tangentes parallèles à une même droite, le diamètre de ces tangentes passera par un point fixe, quelle que soit la direction de cette droite.

Nous appellerons ce point fixe, le *centre* de la courbe.

Suivant cette définition, toute courbe géométrique a un *centre*.

(14) Le diamètre d'un système de droites parallèles entre elles, passe par le centre des moyennes distances des points où une transversale quelconque rencontre ces droites (4). Si donc on prend arbitrairement un point sur chacune de ces droites, le centre des moyennes distances de ces points sera sur le diamètre des droites ; le théorème précédent peut donc être énoncé ainsi :

Si l'on mène les tangentes à une courbe géométrique parallèles à une même droite, et que par le centre des moyennes distances de leurs points de contact avec la courbe, on mène une parallèle à ces tangentes, cette parallèle passera par un point fixe, quelle que soit la direction commune des tangentes.

Ce point fixe est le *centre* de la courbe.

D'après cela nous pouvons dire que : *le centre d'une courbe géométrique, est un point unique qui jouit de la propriété que a somme algébrique de ses distances à toutes les tangentes à la courbe menées parallélement entre elles, est toujours nulle, quelle que soit la direction commune des tangentes.*

Mais nous trouverons tout à l'heure une autre propriété plus caractéristique de ce point.

(15) Remarquons d'abord qu'en vertu du théorème précédent, on a celui-ci :

Si l'on mène à une courbe géométrique toutes ses tangentes parallèles à une même droite, et qu'on applique aux points de contact suivant ces tangentes des forces égales, leur résultante passera par un même point, quelle que soit la direction des tangentes.

Cela est, comme on voit, une extension de la propriété du centre des forces parallèles qu'on fait tourner autour de leurs points d'application.

(16) De même que, dans le théorème de *Newton*, la courbe peut se réduire à un système de droites, ainsi que nous l'avons dit (4), nous pouvons considérer, dans les théorèmes que nous venons de démontrer, un système de points comme une courbe géométrique; alors le théorème (12) donne, comme cas particulier, celui-ci :

Si l'on a dans un plan un système de points et une droite fixe, et qu'on fasse tourner autour de ces points un faisceau de droites dont le point de concours parcourt la droite fixe, le diamètre de ce faisceau, conjugué à cette droite, tournera autour d'un point fixe (*).

Nous donnons à ce point la même dénomination que pour le cas d'une courbe géométrique, c'est-à-dire, que nous l'appellerons le *pôle* de la droite fixe, par rapport au système de points.

(17) Faisons maintenant la transformation parabolique du théorème (7); nous pouvons, d'après ce qui précède, énoncer sur-le-champ cette propriété remarquable des courbes géométriques :

Étant données une courbe géométrique et une droite fixe, si d'un point quelconque de cette droite on mène les tangentes à la courbe, et qu'on conçoive tous leurs points de contact, le pôle *de la droite fixe par rapport à ce système de points sera toujours le*

(*) Nous avons déjà démontré directement ce théorème dans notre premier Mémoire sur les transformations paraboliques, et avons dit qu'il a été donné antérieurement par M. *Poncelet*, dans son Mémoire sur les moyennes harmoniques.

même, quel que soit sur cette droite le point par lequel on a mené les tangentes à la courbe ; et ce pôle sera précisément celui de la droite par rapport à la courbe.

(18) Si la droite est à l'infini, le théorème prend cet énoncé :

Si l'on mène à une courbe géométrique toutes ses tangentes parallèles à une droite donnée, leurs points de contact auront pour centre des moyennes distances un point fixe, quelle que soit la direction commune des tangentes ; ce point fixe sera le centre de la courbe.

Ce théorème, en même temps qu'il exprime une propriété singulière des courbes géométriques, donne une construction très-simple de leurs *centres*.

(19) Pour faire une application de ces théorèmes, qui nous paraissent d'un genre tout nouveau, et dont, par cette raison, l'utilité pourrait sembler douteuse, quoiqu'on sache qu'il n'est point dans les sciences de principes généraux qui ne trouvent tôt ou tard de nombreuses applications, considérons une courbe géométrique, telle que par un point quelconque on ne puisse lui mener que trois tangentes; et soient les trois tangentes menées à cette courbe par un certain point o, par le point de contact de chaque tangente on pourra mener une autre tangente à la courbe, *ces trois nouvelles tangentes se couperont toujours en un même point.*

En effet soient a, b, c, les points de contact de la courbe et de ses trois tangentes issues du point o; et soit o' le point de rencontre des deux nouvelles tangentes à la courbe menées par les points a, b. Il s'agit de prouver que la nouvelle tangente menée par le point c, passera par ce point o'. Si cela n'avait pas lieu, on pourrait mener par le point o' une troisième tangente à la courbe. Le diamètre des trois tangentes issues du point o', conjugué à la droite $\overline{oo'}$, passe par le pôle de cette droite pris par rapport à la courbe (12); le diamètre des trois droites menées du point o' aux trois points a, b, c, conjugué à la droite $\overline{oo'}$, passe par le pôle de cette droite pris par rapport au système des trois points a, b, c (16); mais le pôle de la droite $\overline{oo'}$ par rapport à ces trois points, est le même que

son pôle par rapport à la courbe (17); on en conclut donc que le diamètre des trois tangentes issues du point o', est le même que le diamètre des trois droites menées de ce point aux trois points a, b, c; les deux premières de ces droites sont deux des tangentes à la courbe, la troisième est donc la troisième tangente à la courbe; ainsi le théorème est démontré.

Nous ferons voir ailleurs que ce théorème est applicable à certaines courbes du sixième degré et à toutes celles du quatrième, qui ont trois points de rebroussement, ainsi qu'à toutes les paraboles cubiques.

Le même théorème fait voir que les tangentes aux trois points de rebroussement de la courbe, passent par un même point.

Il est clair qu'une nouvelle transformation parabolique conduit de ce théorème au suivant, qui appartient à toutes les courbes du troisième degré :

Si une transversale quelconque rencontre une courbe du troisième degré en trois points, les tangentes à la courbe en ces points rencontreront la courbe en trois nouveaux points qui seront toujours en ligne droite.

D'où l'on conclut sur-le-champ que les trois asymptotes d'une courbe du troisième degré, rencontrent toujours la courbe en trois points qui sont en ligne droite, et que les trois points d'inflexion d'une courbe du troisième degré, sont toujours en ligne droite.

III.

SURFACES GÉOMÉTRIQUES.

(20) Lemme. *Quand on a un système de points en ligne droite et leur centre des moyennes distances, si l'on fait la transformation par rapport à un paraboloïde, on aura un système de plans passant par une même droite et leur* plan-diamètre, conjugué *à la direction de l'axe du paraboloïde.*

Ce lemme se démontre absolument comme le précédent.

(21) Faisons la transformation parabolique du théorème (2),

nous aurons une seconde surface géométrique ; à chaque transversale correspondra une droite située dans un plan fixe parallèle à l'axe du paraboloïde (Ier Mémoire 41, 2°) ; les plans tangens à la seconde surface menés par cette droite, correspondront aux points où la transversale rencontre la première surface, et le plan-diamètre de ces plans tangens, conjugué à l'axe du paraboloïde, correspondra au centre des moyennes distances de ces points (lemme) ; ce centre est sur un plan déterminé (2) ; le plan-diamètre passera donc par un point fixe correspondant à ce plan ; d'où résulte ce théorème :

Si l'on a une surface géométrique et un plan fixe, et que par une droite prise arbitrairement dans ce plan, on mène les plans tangens à la surface, et le plan-diamètre *de ces plans tangens*, conjugué *au plan fixe* (5), *ce plan-diamètre passera par un point fixe, quelle que soit dans le plan donné la droite par laquelle on a mené les plans tangens.*

Nous appellerons ce point fixe le *pôle* du plan donné, par analogie avec la dénomination admise dans les surfaces du second degré où ce point fixe est le pôle du plan.

(22) Supposons que la droite D, prise dans le plan donné, par laquelle on mène les plans tangens à la surface, tourne autour d'un point *m* de ce plan ; le plan-diamètre correspondant à chaque position de cette droite, tournera autour de la droite menée du point *m* au pôle du plan donné (21). Or, tous les plans tangens à la surface, envelopperont son cône circonscrit qui aura son sommet au point *m* ; un plan parallèle au plan donné, coupera ce cône suivant une courbe géométrique, coupera les plans tangens menés par la droite D, considérée dans une de ses positions, suivant des tangentes à cette courbe toutes parallèles entre elles, et coupera le plan-diamètre des plans tangens suivant le diamère de ces tangentes ; ce diamètre, quelle que soit la direction des tangentes, passe par le centre de la courbe (13) ; le plan-diamètre passe donc par ce centre, quelle que soit la position de la droite D autour du point *m* ; ainsi le centre de la courbe est sur la droite menée du point *m* au pôle du plan donné ; on a donc ce théorème :

Si l'on circonscrit à une surface géométrique une infinité de cônes ayant tous leurs sommets dans un même plan, et qu'on coupe tous ces cônes par un plan parallèle à ce premier plan, puisqu'on joigne par une droite le sommet de chaque cône au centre de sa section, toutes ces droites iront passer par un même point.

(23) On conclut de là, que :

Si l'on circonscrit à une surface géométrique des cônes ayant tous leurs sommets sur une même droite, tout plan parallèle à cette droite coupera les cônes suivant des courbes dont les centres seront sur une même droite parallèle à la droite lieu des sommets des cônes.

Nous avons déjà démontré ce théorème dans le cas particulier où la surface est du second degré. (*Annales de mathématiques*, tom. XIXe, pag. 171.)

(24) Supposons, dans le théorème (21), que le plan fixe soit à l'infini, il s'ensuivra que :

Si l'on mène à une surface géométrique tous ses plans tangens parallèles à un même plan, puis le plan-diamètre de tous ces plans tangens, ce plan-diamètre passera par un point fixe, quelle que soit la direction des plans tangens.

Or, le plan-diamètre d'un système de plans parallèles entre eux, passe évidemment par le centre des moyennes distances d'un système de points pris respectivement sur ces plans ; on peut donc dire que :

Si l'on mène à une surface géométrique tous ses plans tangens parallèles à un même plan, et que par le centre des moyennes distances de leurs points de contact on mène un plan qui leur soit parallèle, ce plan passera par un point fixe, quelle que soit la direction des plans tangens.

Nous appellerons ce point fixe, qui est unique dans la surface, *centre* de la surface.

Ce point, comme on voit, jouit de la propriété que *la somme algébrique de ses distances à tous les plans tangens à la surface menés parallèlement à un même plan est toujours nulle, quel que soit ce plan.*

(25) D'après l'acception que nous donnons au mot *centre* d'une courbe géométrique, il est clair que toutes les sections planes d'une surface cylindrique géométrique, ont leurs *centres* sur une même droite parallèle aux arêtes du cylindre; nous appellerons cette droite *axe* du cylindre.

Si dans le théorème (22), on suppose le plan lieu des sommets des cônes situé à l'infini, ces cônes deviendront des cylindres, et l'on aura ce théorème :

Si l'on circonscrit des cylindres à une surface géométrique, tous leurs axes *passeront par un même point*, centre *de la surface.*

(26) Un système de points dans l'espace peut être considéré comme une surface géométrique, les théorèmes précédens en donnent donc d'autres, relatifs à un système de points.

Ainsi, du théorème (21), on conclut celui-ci :

Étant donnés un système de points dans l'espace et un plan fixe, si par une droite prise arbitrairement dans ce plan, on mène des plans passant respectivement par tous les points du système, le plan-diamètre de ces plans, conjugué au plan fixe, tournera autour d'un point fixe, quelle que soit la droite prise dans le plan donné.

Nous appellerons ce point fixe, le *pôle* du plan par rapport au système de points.

(27) Le théorème (22) donne pareillement celui-ci :

*Si l'on a un système de points dans l'espace et un plan fixe, et que par un point pris arbitrairement dans ce plan, on mène un faisceau de droites aboutissant à ces points., l'*axe *de ce faisceau de droites, conjugué au plan donné* (b), *passera par un point fixe, quel que soit le point pris arbitrairement dans le plan donné.*

Ce point fixe est le *pôle* du plan par rapport au système de points.

(28) D'après ce qui précède, on voit sur-le-champ que le théorème (8) donne, par une transformation parabolique, le suivant :

Étant donnés une surface géométrique et un plan, si par une

droite prise dans ce plan, on mène les plans tangens à la surface, le pôle du plan par rapport aux points de contact sera un point fixe, quelle que soit dans le plan donné la droite par laquelle on a mené les plans tangens; et ce point fixe sera précisément le pôle du plan par rapport à la surface.

(29) Le plan donné peut être à l'infini, on a alors cette propriété générale des surfaces géométriques :

Si l'on mène à une surface géométrique tous ses plans tangens parallèles à un même plan, leurs points de contact avec la surface auront pour centre des moyennes distances un point fixe, quelle que soit la direction commune des plans tangens; ce point fixe sera le centre de la surface.

Cela offre une construction très-simple du *centre* d'une surface géométrique.

(30) Concevons une surface géométrique et plusieurs cônes qui lui soient circonscrits, et aient leurs sommets en ligne droite; tout plan mené par cette droite coupera la surface suivant une courbe, et chaque cône suivant un faisceau de tangentes à cette courbe; les diamètres de ces faisceaux de tangentes, conjugués à la droite lieu des sommets des cônes, passeront tous par un même point qui est le pôle de cette droite par rapport à la cocrbe d'intersection de la surface (12); mais tous ces diamètres appartiennent aux plans-diamètres des cônes, conjugués à la droite lieu des sommets des cônes (2); tous ces plans passent donc par un même point. Ils passent pareillement par un même point de tout autre plan mené par la droite lieu des sommets des cônes, on a donc ces deux théorèmes :

Si l'on circonscrit à une surface géométrique des cônes ayant tous leurs sommets sur une même droite, les plans-diamètres de ces cônes, conjugués à cette droite, passeront tous par une seconde droite.

Et : *Si l'on coupe une surface géométrique par des plans menés par une même droite, les pôles de cette droite par rapport aux sections de la surface par ces plans seront tous en ligne droite.*

(31) Si la droite par laquelle passent tous les plans sécans est à l'infini, ce théorème prend cet énoncé :

Les sections faites dans une surface géométrique par des plans tous parallèles entre eux, ont leurs centres situés sur une même droite.

Il ne faut pas perdre de vue les propriétés du point que nous avons nommé *centre* d'une courbe géométrique. Quand cette courbe a un centre de figure, il est clair que ce point est aussi celui que nous appelons ici *centre*, pourvu que nous considérions la courbe isolément; car, si nous la considérons comme section d'une surface géométrique, son *centre*, comme nous l'entendons, pourra bien ne pas être son centre de figure, parce que la courbe ne serait pas la section complète de la surface proposée, soit par un plan, soit par une autre surface; une autre partie de cette section pourrait être imaginaire, ou composée de points conjugués invisibles, auxquels il faudrait avoir égard pour déterminer le *centre* de la courbe.

Nous ne nous arrêterons pas à faire voir que les propriétés générales des surfaces géométriques que nous venons d'exposer, renferment, comme cas particulier, un grand nombre des propriétés des surfaces du second degré.

IV.

COURBES A DOUBLE COURBURE.

(32) Nous pouvons supposer, dans ce que nous venons de dire sur les surfaces géométriques, qu'une surface se réduise à une ligne courbe; c'est ce qui aura lieu, si l'on considère dans le théorème (2) une surface développable; car la transformation parabolique donnera pour polaire de cette développable une ligne courbe, généralement à double courbure.

Les théorèmes exposés dans le paragraphe précédent, renferment donc aussi des propriétés générales des courbes géométriques à double courbure. Ces propriétés nous paraissent d'autant plus mériter d'être connues, que l'on rencontre rare-

ment l'occasion d'en signaler d'aussi générales sur les courbes à double courbure.

Nous allons donc en énoncer les principales, en indiquant les théorèmes dont elles sont des conséquences.

(33) *Étant donnée une courbe géométrique à double courbure (ou plane, bien entendu), et un plan fixe, si par une droite prise arbitrairement dans ce plan on mène les plans tangens à la courbe, et leur plan-diamètre conjugué au plan fixe, ce plan-diamètre passera par un point fixe, quelle que soit la droite prise dans le plan donné* (21).

Nous appellerons ce point le *pôle* du plan par rapport à la courbe.

(34) *Si par une courbe géométrique quelconque on fait passer des cônes ayant tous leurs sommets sur un même plan, qu'on coupe ces cônes par un plan parallèle à ce premier, et qu'on joigne par des droites les sommets des cônes aux centres de leurs sections, toutes ces droites passeront par un même point qui sera le* pôle *du plan donné par rapport à la courbe* (22).

Ainsi : *Si par une conique on fait passer plusieurs cônes ayant leurs sommets sur un même plan, leurs axes conjugués à ce plan passeront tous par un même point du plan de la conique.*

(35) Supposons dans ces théorèmes que le plan fixe soit à l'infini, on en conclura ceux-ci :

Si l'on mène à une courbe géométrique à double courbure toutes ses tangentes parallèles à un même plan donné, le plan mené par le centre des moyennes distances de leurs points de contact avec la courbe, parallélement au plan donné, passera par un point fixe, quel que soit ce plan (24).

Nous appellerons ce point le *centre* de la courbe.

(36) *Si par une courbe géométrique à double courbure on fait passer une infinité de cylindres, tous leurs axes se rencontreront en un même point, qui sera le centre de la courbe* (25)

Cela fait voir que « quand on projette une ligne à double » courbure sur un plan, le *centre* de la projection est préci- » sément la projection du centre de la courbe à double cour- » bure. »

Ou en d'autres termes :

« Toute courbe à double courbure tracée sur un cylindre, » a son *centre* sur *l'axe* du cylindre. »

(37) *Étant donnés une courbe géométrique quelconque et un plan fixe, si par une droite prise arbitrairement dans ce plan on mène tous les plans tangens à la courbe, le pôle du plan fixe par rapport aux points de contact, sera le même quelle que soit la droite par laquelle on a mené les plans tangens ; ce sera le pôle du plan par rapport à la courbe* (28).

(38) Le théorème (29) nous donne cette propriété des courbes à double courbure, qui nous paraît digne d'être remarquée :

Si l'on mène à une courbe géométrique à double courbure toutes ses tangentes parallèles à un plan donné, leurs points de contact auront pour centre des moyennes distances un point fixe, quel que soit ce plan donné ; ce point sera le centre *de la courbe.*

(39) Enfin, les deux théorèmes du n° 30, donnent ces deux-ci :

Si plusieurs cônes passent par une même courbe géométrique et ont leurs sommets en ligne droite, les plans-diamètres de ces cônes, conjugués à cette droite, passeront tous par une seconde droite.

Si l'on coupe une courbe géométrique à double courbure par des plans passant tous par une même droite, et qu'on prenne dans chaque plan le pôle de cette droite par rapport au système des points où ce plan rencontre la courbe, tous ces pôles seront en ligne droite.

Si les plans transversaux sont parallèles entre eux, les pôles deviendront les centres des moyennes distances des points où les plans rencontreront la courbe, et l'on aura le théorème (3), que nous avons démontré directement.

(40) Terminons ce paragraphe par deux propriétés des surfaces géométriques, que nous ne pouvions donner avant d'avoir exposé celles des courbes à double courbure.

Des deux théorèmes (28 et 37), résulte celui-ci :

Si l'on circonscrit à une surface géométrique une infinité de cônes ayant tous leurs sommets sur un même plan, ce

plan aura même pôle par rapport à toutes les courbes de contact des cônes et de la surface; ce sera le pôle du plan par rapport à la surface.

(41) Si le plan lieu des sommets des cônes est à l'infini, ce théorème prend cet énoncé :

Si l'on circonscrit à une surface géométrique une infinité de cylindres, toutes leurs courbes de contact avec la surface auront un même centre, *ce sera le* centre *de la surface.*

V.

SURFACES DÉVELOPPABLES.

(42) **Lemme.** *Quand on a un système de points dans l'espace et leur centre des moyennes distances, si l'on fait la transformation parabolique, on aura un système de plans, et un dernier plan, correspondant au centre des moyennes distances, qui sera le* plan-diamètre *de ce système de plans,* conjugué *à la direction de l'axe du paraboloïde.*

En effet, d'après le théorème 52 (Ier Mémoire), ce dernier plan sera tel que toute transversale parallèle à l'axe du paraboloïde le rencontrera en un point qui sera le centre des moyennes distances des points où cette transversale rencontrera tous les autres plans; ce qui prouve que ce plan est le plan-diamètre de tous ces plans, conjugué à la direction de l'axe du paraboloïde (5).

(43) Faisons la transformation parabolique du théorème (3), nous aurons une surface géométrique développable; à chaque plan transversal correspondra un point situé sur une droite fixe parallèle à l'axe du paraboloïde; aux points où le plan transversal rencontre la courbe, correspondront les plans tangens à la développable menés par ce point, et enfin, au centre des moyennes distances de ces points, correspondra le plan-diamètre de ces plans tangens, conjugué à la direction de l'axe du paraboloïde ou de la droite fixe (lemme); ce plan-diamètre passera donc par une droite fixe correspondante à l'*axe*

de la courbe à double courbure, conjugué à la direction du plan transversal (3) ; ainsi l'on a le théorème suivant :

Étant données une surface développable géométrique et une droite fixe, dans l'espace, si par un point de cette droite on mène tous les plans tangens à cette développable et leur plan-diamètre *conjugué à la droite donnée, ce plan-diamètre tournera autour d'une droite fixe, quand le point par lequel on a mené les plans tangens parcourra la droite donnée.*

Ce théorème, que nous venons de démontrer directement pour avoir occasion de donner le lemme précédent, qui peut être utile dans plusieurs applications de la méthode des transformations paraboliques, se déduit très-aisément des propriétés générales des surfaces géométriques quelconques ; on voit en effet qu'il est une conséquence des deux théorèmes (30).

On peut supposer que la droite fixe soit à l'infini ; il est facile de voir comment se modifie l'énoncé du théorème.

On peut supposer que la surface développable se réduise à un système de droites, on aura de nouveaux théorèmes, que nous nous dispenserons d'énoncer, parce qu'ils sont des cas particuliers du précédent, ainsi que des deux théorèmes (39) sur les lignes à double courbure, puisqu'un système de droites dans l'espace peut être considéré comme une telle ligne.

(44) Enfin le théorème (9) donne, par une transformation parabolique, en vertu du lemme ci-dessus, le théorème suivant :

Si l'on a une surface développable géométrique et une droite fixe dans l'espace, que par un premier point pris arbitrairement sur cette droite on mène tous les plans tangens à la surface, que par un second point pris arbitrairement aussi sur la droite on mène des plans passant par toutes les arêtes de contact ; le plan-diamètre de ce système de plans passera par une droite fixe, quels que soient les deux points pris sur la droite donnée.

Ce théorème aurait pu être déduit aussi de ce qui précède et du théorème (17) sur les courbes géométriques.

(45) Tout plan tangent à une surface développable, est osculateur en un point de son arête de rebroussement ; on

pourroit donc donner aux théorèmes précédens d'autres énoncés, en considérant une courbe à double courbure, au lieu d'une surface développable.

Pareillement, en observant que les tangentes à une courbe à double courbure sont les génératrices de la développable qui a cette courbe pour arête de rebroussement, on pourra appliquer aux surfaces développables les théorèmes sur les courbes à double courbure compris dans le paragraphe précédent.

Par exemple, on peut donner au théorème (38), cet énoncé : *Si l'on prend sur une surface développable géométrique toutes ses génératrices parallèles à un même plan, les points où elles toucheront l'arête de rebroussement de la surface auront pour centre des moyennes distances un point fixe, quel que soit ce plan ; ce point fixe sera le* centre *de l'arête de rebroussement.*

VI.

SYSTÈMES DE COURBES PLANES GÉOMÉTRIQUES, ET SYSTÈMES DE SURFACES GÉOMÉTRIQUES QUI ONT LES MÊMES POINTS COMMUNS.

(46) Nous avons vu que l'équation d'une courbe du degré m étant

$$x^m + (ay + b)\,x^{m-1} + \ldots\ldots + k = o\,,$$

l'équation de son *diamètre conjugué* à l'axe des x est

$$mx + (ay + b) = o.$$

Soit une seconde courbe du degré m ayant pour équation

$$x^m + (a'y + b')\,x^{m-1} + \ldots\ldots + k' = o\,,$$

celle de son diamètre conjugué à l'axe des x sera

$$mx + (a'y + b') = o.$$

Soit enfin une troisième courbe du degré m, passant par les points d'intersection (réels ou imaginaires) des deux premières,

son équation ne pourra être que de la forme

$$x^m(1+\mu)+[(ay+b)+\mu(a'y+b')]x^{m-1}+\ldots+(k+\mu k')=o;$$

et l'équation de son diamètre conjugué à l'axe des x sera

$$mx+\frac{(ay+b)+\mu(a'y+b')}{1+\mu}=o.$$

Si l'on fait $mx+(ay+b)=o$ dans cette équation, elle se réduit à $mx+(a'y+b')=o$; ce qui prouve que les diamètres des trois courbes, passent par un même point. On a donc ce théorème :

Quand plusieurs courbes géométriques ont toutes, deux à deux, les mêmes points d'intersection (réels ou imaginaires), leurs diamètres conjugués *à une même droite passent tous par un même point.*

(47) Soient plusieurs surfaces géométriques ayant toutes, deux à deux, la même courbe d'intersection (réelle ou imaginaire); concevons leurs plans-diamètres conjugués à une même droite; tout plan transversal parallèle à cette droite, coupera les surfaces suivant des courbes qui auront, deux à deux, les mêmes points d'intersection, et coupera les plans-diamètres suivant des droites qui seront les diamètres de ces courbes, conjugués à cette même droite; tous ces diamètres passeront par un même point, d'après le théorème précédent; cela prouve que les plans-diamètres auront tous la même intersection; on a donc ce théorème :

Quand plusieurs surfaces géométriques ont toutes, deux à deux, la même intersection, leurs plans-diamètres conjugués *à une même droite passent tous par une même droite.*

(48) L'équation d'une surface géométrique du degré m, rapportée à trois axes coordonnés des x, y et z, et ordonnée par rapport à x est de la forme

$$x^m+(ay+bz+c)\,x^{m-1}+\ldots+k=o;$$

et l'équation du plan-diamètre de cette surface, conjugué à l'axe des x est

$$mx + (ay + bz + c) = o.$$

Soient

$$x^m + (a'y + b'z + c')\,x^{m-1} + \ldots. + k' = o,$$
$$x^m + (a''y + b''z + c'')\,x^{m-1} + \ldots. + k'' = o,$$

les équations de deux autres surfaces du degré m; celles de leurs plans-diamètres conjugués à l'axe des x sont

$$mx + (a'y + b'z + c') = o,$$
$$mx + (a''y + b''z + c'') = o.$$

Une quatrième surface du degré m, passant par les points d'intersection des trois premières, aura son équation de la forme

$$(1 + \lambda + \mu)\,x^m + [(ay + bz + c) + \lambda(a'y + b'z + c') + \mu(a''y + b''z + c'')]\,x^{m-1} + \ldots. + k + \lambda k' + \mu k'' = o;$$

l'équation du plan-diamètre de cette surface, conjugué à l'axe des x, est

$$mx + \frac{(ay+bz+c)+\lambda(a'y+b'z+c') + \mu(a''y+b''z+c'')}{1 + \lambda + \mu} = o.$$

Cette équation fait voir que le plan qu'elle représente passe par le point d'intersection des plans-diamètres des trois premières surfaces, on a donc ce théorème :

Quand plusieurs surfaces géométriques ont toutes, trois à trois, les mêmes points d'intersection, leurs plans-diamètres conjugués à une même droite passent tous par un même point.

VII.

SYSTÈMES DE COURBES PLANES GÉOMÉTRIQUES QUI ONT MÊMES TANGENTES COMMUNES, ET SYSTÈMES DE SURFACES GÉOMÉTRIQUES QUI ONT MÊMES PLANS TANGENS COMMUNS.

(49) En appliquant la méthode des transformations paraboliques aux trois théorèmes du paragraphe précédent, comme nous avons fait (12 et 21) pour les théorèmes (1 et 2), nous en obtiendrons de nouveaux.

Ainsi le théorème (46) donne celui-ci :

Quand plusieurs courbes géométriques ont toutes, deux à deux, les mêmes tangentes communes (réelles ou imaginaires), leurs pôles relatifs à une même droite sont tous sur une autre droite.

(50) Si la droite proposée est à l'infini, on en conclut que :

Quand plusieurs courbes géométriques ont toutes, deux à deux, les mêmes tangentes communes, leurs centres sont tous en ligne droite.

(51) Le théorème (47) donne celui-ci :

Quand plusieurs surfaces géométriques sont toutes inscrites dans la même développable, les pôles d'un même plan, par rapport à toutes ces surfaces, sont sur une même droite.

(52) Si le plan est à l'infini, on en conclut que :

Quand plusieurs surfaces géométriques sont toutes inscrites dans la même développable, leurs centres sont tous en ligne droite.

(53) Enfin le théorème (48) donne celui-ci :

Quand plusieurs surfaces géométriques ont toutes, prises trois à trois, les mêmes plans tangens communs, les pôles d'un même plan, par rapport à ces surfaces, sont tous sur un autre plan.

(54) Si le premier plan est à l'infini, on en conclut que :

Quand plusieurs surfaces géométriques ont toutes, trois à trois, les mêmes plans tangens communs, leurs centres sont tous sur un même plan.

Ces divers théorèmes généraux donnent, comme cas particuliers, les propriétés connues des coniques et des surfaces du second degré.

VIII.

(55) Nous avons vu que le théorème (3), relatif aux courbes géométriques à double courbures coupées par une suite de plans parallèles entre eux, n'est qu'un cas particulier d'un autre, dans lequel les plans passent par une même droite (39). Pareillement le théorème de *Newton* sur les courbes planes, et son analogue dans les surfaces géométriques, ainsi que ceux que nous avons démontrés sur les systèmes de courbes planes et de surfaces qui ont les mêmes points d'intersection (parag. VI), ne sont que des cas particuliers d'autres théorèmes où les transversales, au lieu d'être parallèles, émanent d'un même point; ces théorèmes plus généraux s'obtiendraient par de nouvelles transformations paraboliques de ceux que nous avons déduits, dans ce mémoire, des premiers. Mais comme il est une marche beaucoup plus simple pour les conclure directement de ces premiers sans employer deux transformations paraboliques, nous ne les exposerons que quand nous nous occuperons de cette méthode.

Fin de la *Note sur le mouvement vibratoire*, etc., insérée à la page 227 du tome V, par M. PAGANI, professeur extraordinaire à l'Université de Louvain.

Supposons que l'on ait $\varphi(r, \theta)=o$, c'est-à-dire, que la forme initiale de la membrane soit plane; seulement nous admettrons que l'on imprime, à l'origine du temps, une vitesse initiale aux divers points de la membrane perpendiculairement à son

plan. Dans cette hypothèse, la formule (16) nous donnera

$$(17)\qquad z=\frac{1}{2c}\,\Sigma\,\frac{N_0}{\mu P_0}f(\mu r)\sin.\, c\mu t+\mathop{S}_{i=1}^{i=\infty}\frac{r^i}{c}\,\Sigma\,\frac{N}{\mu P}f(\mu r)\sin.\, c\mu t,$$

les fonctions $f(\mu r)$, N, P étant déterminées par les formules (9), (15), et la quantité μ étant racine de l'équation (10). N_0 et P_0 indiquent ce que deviennent N et P lorsque $i=o$.

Cela posé, considérons d'abord les cas où la vitesse initiale est une fonction de la seule variable r; et faisons, pour cela, $\psi(r,\theta)=Fr$. En observant alors que $\int_o^{2\pi}\cos.\, i\alpha.\, d\alpha$ est égale à zéro pour toutes les valeurs entières de i, excepté le cas où $i=o$; et que l'on a toujours $\int_o^{2\pi}\sin.\, i\alpha.\, d\alpha=o$; on trouvera facilement, au lieu de la formule (17), la suivante

$$(18)\qquad z=\frac{2}{a^2c}\,\Sigma\,\frac{f(\mu r)\sin.\, c\mu t}{\mu f'^2(a\mu)}\int_o^a Fr.\, f(\mu r)\, rdr,$$

dans laquelle on doit prendre

$$(19)\qquad f(\mu r)=\int_o^\pi \cos.\,(\mu r\cos.\,\omega)\, d\omega,$$

et déterminer μ au moyen de l'équation

$$(20)\qquad \int_o^\pi \cos.\,(a\mu\cos.\,\omega)\, d\omega=o.$$

Les racines de cette équation étant incommensurables, on voit que les termes de la série (18) ne peuvent devenir nuls tous à la fois pour la même valeur de t, excepté lorsque le mouvement commence. En conséquence, la membrane ne pourra faire entendre un son unique, que dans les cas où la fonction

Fr sera telle que le second membre de l'équation (18) se réduise à un seul terme.

Pour réaliser cette supposition, nous remarquerons que la fonction Fr désigne la valeur du coefficient différentiel $\frac{dz}{dt}$, en y faisant $t=o$. En admettant donc que l'on ait simplement

$$(21) \qquad z = \frac{2}{a^2 c} \cdot \frac{f(\mu r)\sin. c\mu t}{\mu f'^2(a\mu)} \int_o^a \mathrm{F}r.f(\mu r) r dr,$$

on devrait avoir

$$\mathrm{F}r = \frac{2f(\mu r)}{a^2 f'^2(a\mu)} \int_o^a \mathrm{F}r.f(\mu r) r dr.$$

Or, en supposant F$r = \mathrm{K}f(\mu r)$ (en dénotant par K une constante quelconque), il est facile de s'assurer que la dernière équation est satisfaite; car il résulte de la dernière formule de la page 230, que l'on doit avoir $\int_o^a f^2(\mu r) r dr = \frac{a^2}{2} f'^2(a\mu)$; ce qui établit l'identité entre les deux membres de l'équation ci-dessus. En substituant donc dans la formule (21), on aura, pour déterminer le mouvement de la membrane (dans l'hypothèse $z=o$ et $\frac{dz}{dt} = \mathrm{K}f(\mu r)$ lorsque $t=o$),

$$z = \frac{\mathrm{K}f(\mu r)\sin. c\mu t.}{c\mu}$$

Dénotons par ρ_1, ρ_2, ρ_3, etc., les valeurs de $a\mu$, données par l'équation (20), et distribuées par ordre de grandeur en commençant par la plus petite; en substituant, dans la dernière formule, $\frac{\rho_n}{a}$ à la place de μ, on aura

$$(22) \qquad z = \frac{a\mathrm{K}}{c\rho_n} f\left(\frac{\rho_n r}{a}\right) \sin. \frac{c\rho_n t.}{a}$$

En examinant cette expression de z, on voit sans peine que, pendant le mouvement de la membrane, il y aura plusieurs circonférences concentriques à son contour qui seront en repos. Les rayons de ces circonférences *nodales* seront successivement égaux à $\frac{\rho_1}{\rho_n}a, \frac{\rho_2}{\rho_n}a, \frac{\rho_3}{\rho_n}a \ldots\ldots \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}a$. Les oscillations de la membrane seront isochrones, et la durée d'une vibration sera égale à $\frac{a\pi}{c\rho_n}$; par conséquent la membrane vibrera d'autant plus vite, toutes choses égales d'ailleurs, que sa tension sera plus forte et que l'indice n sera plus grand.

Supposons maintenant que l'on imprime une vitesse initiale b à tous les points de la membrane depuis le centre jusqu'à la distance très-petite $\frac{a}{m}$. Il faudra supposer $Fr = b$ depuis $r = o$ jusqu'à $r = \frac{a}{m}$, et $Fr = o$ pour toutes les valeurs de r plus grandes que $\frac{a}{m}$. En outre, en changeant μ en $\frac{\rho_n}{a}$, et en observant que les limites de l'intégrale peuvent être o et $\frac{a}{m}$, la formule (18) nous donnera

$$z = \frac{2b}{ac}\,\Sigma\,\frac{f\left(\frac{\rho_n r}{a}\right)\sin.\frac{c\rho_n t}{a}}{\rho_n f'^2\rho_n}\int_o^{\frac{a}{m}} f\left(\frac{\rho_n r}{a}\right)rdr.$$

Mais, en développant la fonction $f\left(\frac{\rho_n r}{a}\right)$ en série, on trouvera, à l'aide de la formule (19),

$$f\left(\frac{\rho_n r}{a}\right) = \pi\left[1 - \left(\frac{\rho_n}{2}\right)^2\frac{r^2}{a^2} + \left(\frac{\rho_n}{2}\right)^4\frac{r^4}{2^2 . a^4} - \left(\frac{\rho_n}{2}\right)^6\frac{r^6}{2^2 . 3^2 . a^6} + \text{etc.}\right];$$

partant

$$\int_o^{\frac{a}{m}} f\left(\frac{\rho_n r}{a}\right)rdr = \pi\left[\frac{1}{2}\frac{a^2}{m^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_n}{a}\right)^2\frac{a^2}{m} + \text{etc.}\right].$$

Si la quantité $\frac{a}{m}$ est une très-petite fraction de a, on pourra, dans le second membre de ce cette équation, négliger tous les termes qui suivent le premier. Alors on aura, pour déterminer le mouvement de la membrane, cette formule assez simple

$$(23) \qquad z = \frac{ab\pi}{cm^2} \Sigma \frac{f\left(\frac{\rho_n r}{a}\right) \sin. \frac{c\rho_n t}{a}}{\rho_n f' \rho^2{}_n}.$$

Il résulte donc de cette analise qu'en frappant la membrane au centre et dans une très-petite étendue autour de lui, elle fera entendre plusieurs sons à la fois; mais il est évident que les deux ou trois premiers sons seront les seuls appréciables, et que le plus grave de tous est celui qui correspond à $\rho_n = \rho_1$. Il est facile de voir, en outre, que le mouvement de la membrane dans ces cas a beaucoup d'analogie avec celui d'une corde que l'on pincerait dans un certain point de sa longueur; seulement la corde vibrante se divise, en genéral, en deux, trois, quatre, etc., parties égales, tandis que les circonférences nodales de la membrane la divisent toujours en zones dont les largeurs sont incommensurables.

Nous allons maintenant appliquer la formule (17) au cas où la fonction $\psi(r,\alpha)$ est égale à la constante b pour toutes les valeurs de r comprises entre les limites r', r'', et pour les valeurs de α depuis $\alpha = o$ jusqu'à $\alpha = \theta'$. En dehors de ces limites, la fonction ψ est supposée égale à zéro; et l'on admet en outre que les quantités $r'' - r'$, et θ' sont très-petites.

On aura d'abord

$$\frac{N}{b} = \cos. i\theta \int_{r'}^{r''} f(\mu r) r^{i+1} dr \int_{o}^{\theta'} \sin. i\alpha d\alpha$$

$$+ \sin. i\theta \int_{r'}^{r''} f(\mu r)\, r^{i+1} dr \int_{o}^{\theta'} \sin. i\alpha d\alpha.$$

En effectuant les intégrations par rapport à α, et en observant que l'on peut faire

$$\int_{r'}^{r''} f(\mu r)\, r^{i+1} dr = (r'' - r')\, r'^{i+1} f(\mu r'),$$

à cause de la petitesse de $r'' - r'$, on trouvera sans peine

$$\mathrm{N} = b(r'' - r')\,\frac{r'^{i+1}}{i}\,[\sin. i\theta \sin. i(\theta - \theta')] f(\mu r');$$

et comme on a

$$\mathrm{P} = \frac{\pi}{2}\,[\, a^{i+1} f'(a\mu)]^2,$$

on en déduit

$$\mathrm{N}_0 = b(r'' - r')\, r'\theta' f(\mu r'), \quad \mathrm{P}_0 = \frac{\pi}{2}\, a^2 f'^2(a\mu);$$

et en substituant dans la formule (17), il est aisé de voir qu'on peut la mettre sous cette forme

$$\begin{aligned} z = \frac{2b\,(r'' - r')r'}{\pi a^2 c}\Big[& \frac{\theta'}{2}\,\Sigma\,\frac{f(\mu_0 r') f(\mu_0 r)}{\mu_0 f'^2(a\mu_0)} \sin. c\mu_0 t \\ & + \frac{r'}{a^2}(\sin.\theta - \sin.(\theta - \theta'))\,\Sigma\,\frac{f(\mu_1 r') f(\mu_1 r)}{\mu_1 f'^2(a\mu_1)} \sin. c\mu_1 t \\ & + \frac{r'^2}{2a^4}(\sin.2\theta - \sin.2(\theta - \theta'))\,\Sigma\,\frac{f(\mu_2 r') f(\mu_2 r)}{\mu_2 f'^2(a\mu_2)} \sin. c\mu_2 t \\ & + \text{etc.} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \Big] \end{aligned}$$

Dans le second membre de cette équation, le signe Σ se rapporte aux valeurs de μ_0, μ_1, μ_2, etc., dont le terme général μ_i a une infinité de valeurs données par l'équation (10), résolue par rapport à μ.

En négligeant les termes du second ordre, par rapport à $\frac{r'}{a^2}$, que l'on peut regarder comme une petite fraction, le second membre de l'équation précédente se réduit à son premier terme, et l'on a, pour déterminer le mouvement de la membrane, cette formule très-simple.

$$z = \frac{b(r''-r')r'\theta'}{\pi a^2 c} \Sigma f\left(\frac{\rho_n r'}{a}\right) f\left(\frac{\rho_n r}{a}\right) \sin.\frac{c\rho_n t}{a}.$$

En comparant cette valeur de z avec celle de la formule (23), on voit que les sons qu'elle rendrait seraient les mêmes dans les deux cas, quoique les circonférences nodales aient des rayons différens.

Nous terminerons cette note par la remarque que la série donnée par l'équation (23), ainsi que les séries que nous fournissent les deux dernières formules, ne pouvant être réduites à un seul terme, qu'en négligeant ceux qui ont des valeurs comparables à celle du premier terme dont la valeur est la plus grande ; la membrane fera entendre, dans tous ces cas, outre le son fondamental qui est le même, plusieurs autres sons appréciables, lesquels n'étant pas harmoniques avec le premier, causeront cette singulière sensation que l'on éprouve lorsqu'on frappe d'un coup de baguette la caisse d'un tambour. Ceci nous explique aussi pourquoi la corde d'un *piano* fait entendre un son lorsqu'on la frappe d'un coup de marteau, tandis que la membrane du tambour ne fait entendre qu'un bourdonnement ; et enfin, pourquoi ce bourdonnement est sensiblement le même, soit que l'on frappe la membrane au centre ou dans un autre endroit quelconque peu éloigné de ce point.

Mémoire sur le centre de gravité d'une pièce de 24 en bronze; par M. TIMMERHANS, 1er lieutenant d'artillerie, à Liége (communiqué par la Société des sciences naturelles de Liége).

Ayant été chargé, ainsi que plusieurs de mes camarades, de la recherche du centre de gravité d'une pièce de 24 en bronze, j'ai cru que ce travail pourrait être de quelqu'intérêt pour MM. les membres de la société des sciences naturelles, d'autant plus que jusqu'à présent, on n'avait pas réussi à trouver des formules exactes, tant pour le volume que pour le centre de gravité des anses et des embases des tourillons.

Comme cependant il serait trop long de faire ici tous les calculs nécessaires pour trouver le centre susdit, je me contenterai d'indiquer la marche que j'ai suivie et de poser à la fin quelques questions, qui me semblent découler naturellement du sujet.

Avant de passer à la résolution même, je crois utile d'observer que, pour la faire avec l'exactitude requise, il est nécessaire de prendre une petite unité linéaire.

Dans mon travail même, j'ai pris le millimètre pour unité, sans toutefois négliger dans l'expression des données les dixièmes du millimètre, ce qui me donnait l'évaluation des volumes en millimètres cubes; puis je cherchais le poids, en multipliant ces volumes par le poids spécifique du bronze indiqué dans *Gassendi*, qui, vu la conformité de l'alliage du cuivre et de l'étain dans les pièces françaises et les nôtres, était aussi le poids spécifique de nos pièces; quoique cette dernière évaluation ne fût point nécessaire, puisque je faisais la supposition de l'homogénéité du métal dans toute l'étendue de la pièce, j'ai pourtant cru utile de la faire, vu que cela m'offrait un moyen facile de vérification de mon travail, le poids moyen du canon étant connu.

Les formules intégrales contiennent pour la plus grande partie des arcs de tangentes. Il ne sera peut-être pas superflu de remarquer, qu'en voulant les évaluer d'après les séries qu'on obtient par le théorème de *Maclaurin*, l'opération serait lon-

gue et ennuyeuse. J'ai donc préféré de chercher premièrement les angles qui appartenaient à ces tangentes, et alors j'avais par une simple proportion les longueurs des arcs mêmes.

Pour chercher le centre de gravité du canon, j'ai commencé par supposer la pièce toute massive, par conséquent non forée; ensuite j'ai cherché séparément les centres des cinq parties suivantes, dans lesquelles on divise ordinairement une pièce :

1° Le cul-de-lampe qui comprend le bouton ABC (*fig.* 1).

2° Le premier renfort BCDE.

3° Le second renfort DEFG, sans toutefois y comprendre ni les anses, ni les tourillons avec leurs embases.

4° La volée FGHI.

5° Le collet et le bourelet en tulipe HIKL.

Chacune de ces parties se divise elle-même en plusieurs subdivisions, dont il fallait chercher séparément le centre de gravité et les volumes, pour trouver ceux de la grande division elle-même.

Après ce travail, je cherchai les volumes et centres de gravité :

α des anses (*fig.* 3),

β des tourillons avec leurs embases (*fig.* 2),

γ de l'âme *abcdef* (*fig.* 1), et j'avais dès-lors facilement le volume et le centre de gravité de la pièce entière. Car ce centre de gravité, devait être dans un plan vertical par l'axe du canon, qui le divise en deux parties symétriques; de plus, la plupart des parties susdites étant des corps de révolution autour de l'axe du canon même, leurs centres de gravité devaient se trouver dans cet axe, et pour les autres parties, qui n'étant pas corps de révolution autour de l'axe du canon, n'y avaient point leurs centres de gravité, il était possible de déterminer leurs distances au-dessus et au-dessous de cet axe; prenant donc cet axe et une ligne qui le coupe à angle droit, et qui passe par l'extrémité du bouton du cul-de-lampe A (*fig.* 1), j'avais mes deux axes de coordonnées, et puis par les momens le centre de gravité de la pièce.

Par la simple inspection de la *fig.* 1, qui représente le canon

de 24 en bronze, l'on se convaincra que les cinq grandes divisions sont des corps de révolution autour de l'axe de la pièce, leurs plans générateurs sont terminés de deux manières, ou par des lignes droites, ou d'une part par l'axe et dans les autres sens par un assemblage d'arcs de cercles et de lignes droites.

Les premiers n'offrent aucune difficulté; pour les seconds, il faut distinguer deux cas :

1er *Cas*. Ou l'arc de cercle qui termine en partie le plan générateur, est convexe par rapport à l'axe du canon (*fig.* 5.);

2e *Cas*. Ou il est concave par rapport à ce même axe (*fig.* 4).

Je vais m'occuper successivement de ces deux cas.

Pour le premier, soit Ax l'axe; O le centre de l'arc de cercle; la distance constante de ce centre à l'axe $= a$;

Le rayon de l'arc $= r$.

L'origine des coordonnées de l'arc de cercle est au centre; FHfh sera l'élément du plan générateur; nommant l'ordonnée du cercle y, l'ordonnée du plan générateur y', on aura :

$$y' = a + y$$
$$y' = a + \sqrt{(r^2 - x^2)};$$

et par conséquent l'élément du corps de révolution,

$$d\gamma = \pi y'^2 dx = \pi dx[a + \sqrt{(r^2 - x^2)}]^2$$
$$= \pi dx[a^2 + r^2 - x^2 + 2a\sqrt{(r^2 - x^2)}];$$

donc

$$\gamma = \int \pi dx[a^2 + r^2 - x^2 + 2a\sqrt{(r^2 - x^2)}]$$

$$= \pi\left[(a^2+r^2)x - \frac{1}{3}x^3 + ax(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + a^2 r \operatorname{arc tang.}\sqrt{\frac{x^2}{r^2-x^2}}\right].$$

La constante étant $= o$, puisque $x = o$ donne $\gamma = o$; si au lieu de prendre O pour l'origine, on avait pris B, alors on trou-

verait :

$$y' = a + y = a + \sqrt{(2rx - x^2)}$$
$$dy' = \pi \ [a + \sqrt{(2rx - x^2)}]^2 \, dx$$
$$y'' = \pi \int [a + \sqrt{(2rx - x^2)}]^2 \, dx$$
$$= \pi \int [a^2 + 2rx - x^2 + 2a \sqrt{(2rx - x^2)}] \, dx$$
$$= \pi \Big[a^2 x + rx^2 - \frac{1}{3} x^3 - ax^{\frac{1}{2}} (r - x) (2r - x)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ 2r^2 a \text{ arc tang.} \sqrt{\frac{x}{2r - x}} \Big]$$

Pour le deuxième cas, en laissant aux lettres leurs significations susdites, l'on aura selon qu'on prendra l'origine au centre ou à l'extrémité du rayon,

(*fig.* 5.). . . . . . $y' = a - y$

1° $y' = a - \sqrt{(r^2 - x^2)}$, 2° $y' = a - \sqrt{(2rx - x^2)}$

ce qui donne pour les volumes, les deux formules suivantes :

1° $$y = \pi \Big[(r^2 + a^2) x - \frac{1}{3} x^3 - ax (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$- r^2 a \text{ arc tang.} \sqrt{\frac{x^2}{r^2 - x^2}} \Big];$$

2° $$y' = \pi \Big[a^2 x + rx^2 - \frac{1}{3} x^3 + ax^{\frac{1}{2}} (r - x)(2r - x)^{\frac{1}{2}}$$
$$- 2r^2 a \text{ arc tang.} \sqrt{\frac{x}{2r - x}} \Big].$$

Si $Z'Z'$ désignent dans les figures 5 et 4 les centres respectifs des solides engendrés par les plans dont nous venons de nous

occuper, on aura :

$$Ez' = \frac{\int x dV}{V}, \quad \text{et } Cz' = \frac{\int x dV'}{V'};$$

en observant que

$$\int x dV = \frac{1}{2}(r^2 + a^2)x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}a(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}ar^3$$

$$\int x dV' = \frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{2}{3}rx^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}(2r-x)^{\frac{3}{2}} - arx^{\frac{1}{2}}(r-x)(2r-x)^{\frac{1}{2}} + 2r^3a \text{ arc tang.} \sqrt{\frac{x}{2r-x}};$$

on a aussi (*fig.* 4)

$$Ez' = \frac{\int x dV}{V}, \quad \text{et } Cz' = \frac{\int x dV'}{V'}.$$

et observant que, d'après les premières formules,

$$\int x dV = \frac{1}{2}(r^2 + a^2)x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}a(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}ar^3$$

$$\int x dV' = \frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{2}{3}rx^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}(2r - x)^{\frac{3}{2}} + arx^{\frac{1}{2}}(r - x)(2r - x)^{\frac{1}{2}} - 2ar^3 \text{ arc tang.} \sqrt{\frac{x}{2r-x}}$$

les constantes étant toujours $= 0$.

D'après ce qui précède, il serait tout-à-fait superflu d'entrer dans les détails de la recherche, et du volume et du centre des cinq divisions susdites, ainsi que de l'âme de la pièce, puisque ce sont, ou des cylindres, ou des cônes tronqués, ou enfin des corps de révolution dont les plans générateurs sont terminés d'une part par l'axe du canon et dans les autres sens

par des lignes droites et des arcs de cercles. Ayant déterminé géométriquement, ou quelques fois par le secours de la trigonométrie, les centres de ces arcs, la longueur de leurs rayons et la distance de ces centres à l'axe, on peut trouver par les quatre formules susdites le volume et le centre de ces corps. Je passe donc aux parties du canon qui, n'étant pas corps de révolution autour de l'axe de la pièce, doivent être déterminées d'une manière différente, et d'abord je prendrai les embases des tourillons. Ces embases sont, comme on voit par la figure 2, un corps qui, latéralement est terminé par un assemblage de surfaces cylindriques, et dont la base est une surface plane parallèle au plan vertical, passant par l'axe du canon. Ce corps passe à travers le cône tronqué du second renfort.

Pour trouver et son volume et son centre de gravité, on cherche premièrement le cercle dont le plan passe perpendiculairement par l'axe du canon et qui contient en même temps l'axe des tourillons.

Soit abc, *fig.* 2, ce cercle. Soit $defg$ la base des embases.

Si à présent on imagine un système de plans horizontaux, coupant à la fois les embases et le canon, les parties de ces plans, qui forment les sections des embases avec eux, sont une série de trapèzes; la différentielle des embases est donc un prisme dont les bases sont deux de ces trapèzes variables; or, un trapèze est égal à la ligne qui joint les milieux des deux côtés nos parallèles, multipliée par la hauteur; mais les lignes qui joignent les milieux des côtés non parallèles dans la série du trapèze, sont toutes situées dans le plan vertical passant par l'axe des tourillons, et perpendiculairement par l'axe du canon, et par conséquent égales à la distance constante de la base des embases à l'axe du canon, moins l'ordonnée correspondante du cercle abc.

A présent il sera facile de trouver la différentielle de la partie supérieure des embases. Soit pour cela le rayon $of = r$, $op = x$, $pm = y$. La distance constante de la base à l'axe du canon $oi = a$, $hi = b$, $rs = y'$, le rayon $hc = s$, on aura

pour la différentielle du volume, prenant l'origine des coordonnées au point o,

$$dV = 2ydx\,(a - y');$$

ou puisqu'on a

$$y = \sqrt{(r^2 - x^2)} \text{ et } y' = \sqrt{[s^2 - (b - x)^2]}$$
$$dV = 2dx\sqrt{(r^2 - x^2)}\,[a - \sqrt{s^2 - (b - x)^2}].$$

Cette formule doit être intégrée depuis $x = o$ jusqu'à $x = r$.

Pour la partie inférieure des embases soit le rayon $dt = R$. La distance $ou = ot = c$, $ov = x$, les ordonnées des cercles dont t et u sont les centres y'', on aura $vx = y'' - c$, donc $xx' = 2\,(y'' - c)$; nous aurons pour la différentielle de son volume,

$$dV' = 2(y'' - c)\,dx\,(a - y');$$

mais

$$y'' = \sqrt{(R^2 - x^2)} \text{ et } y' = \sqrt{[s^2 - (b + x)^2]},$$

donc

$$dV' = 2[\sqrt{(R^2 - x^2)} - c]\,[a - \sqrt{[s^2 - (b + x)^2]}]dx$$

à intégrer depuis $x = o$ jusqu'à $x = og = d$.

Pour les centres de gravité on a :

$$oz = \int \frac{xdV}{V}$$
$$= \frac{\int 2xdx\sqrt{r^2 - x^2}\,[a - \sqrt{[s^2 - (b - x)^2]}]}{\int 2dx\sqrt{r^2 - x^2}\,[a - \sqrt{[s^2 - (b - x)^2]}]}$$

pour la partie supérieure, et

$$oz' = \frac{\int 2xdx[\sqrt{(R^2 - x^2)} - c]\,[a - \sqrt{[s^2 - (b + x)^2]}]}{\int 2dx\,[\sqrt{(R^2 - x^2)} - c]\,[a - \sqrt{[s^2 - (b + x)^2]}]}$$

pour la partie inférieure, à intégrer entre les mêmes limites.

Quant à l'intégration de ces quatre formules, il m'a été impossible de la faire autrement que par des séries. J'ai développé pour cela les deux radicaux par le théorème de *Newton*, et la multiplication faite, j'ai eu une série de la forme

$$Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots\ldots\ldots + \text{etc.}$$

où les exposans étaient entiers ou fractionnaires et par conséquent faciles à intégrer.

J'aurais pu me contenter de ne développer qu'un radical, puisque j'aurais également obtenu des formules différentielles faciles à intégrer ; cependant j'ai préféré le premier moyen, parce que prenant un des facteurs trop grand, l'autre trop petit, il y avait compensation.

Les tourillons mêmes étant des cylindres, n'offrent aucune difficulté.

Les Anses.

Les anses sont des anneaux placés sur les canons et au-dessus du centre de gravité, attendu qu'ils doivent servir à les soulever, soit pour les placer sur des affûts, soit dans tout autre but.

La figure 3, qui est une section faite selon la longueur de l'anse et la divisant en deux parties symétriques, fait voir que l'anse n'est point tout-à-fait circulaire, mais qu'elle se compose de parties droites, réunies par deux portions circulaires.

La figure *abcdefg* qui représente une section perpendiculaire à travers l'anse, montre que d'un côté cette section est fermée par une demi-circonférence ; de l'autre par la moitié d'un octogone régulier circonscrit à ce cercle.

L'anse s'adapte à la surface conique du canon par un plan semi-circulaire, semi-polygonal ABCDEFG, semblable à la section perpendiculaire susdite, ce plan est la base d'un petit corps prismatique dont *hm* est la hauteur, et la réunion de la base supérieure de ce corps prismatique avec le corps de l'anse se fait au moyen des arcs de cercle *hi*, *kl*, etc.

Pour trouver le volume du corps de l'anse, on commence par chercher l'aire et le centre de gravité de la coupe transversale *abcdefg*; on cherche ensuite le chemin que parcourt ce centre de gravité, et on a par la règle de *Guldin*, le volume du corps de l'anse.

Pour avoir le volume du pied de l'anse, il faut remarquer qu'il est composé de deux parties. La portion prismatique, qui, quoique sa base inférieure ne soit pas plane, est considérée cependant comme telle; vu sa petitesse, qui, sur la surface de la pièce, est à peu près plane, et n'offre par conséquent aucune difficulté. Pour la seconde partie, qui unit la partie prismatique au corps de l'anse, on procède de la manière suivante.

On imagine un système de plans perpendiculairement par l'axe de cette partie; alors ces sections sont des figures semblables à la base du pied ou à la section transversale du corps de l'anse *abcdefg*; pour exprimer une telle section en fonction de sa hauteur, il est nécessaire de trouver l'aire de la partie de cette section, dont *wxyz* est la projection horizontale et *uv* la projection verticale. Cette partie forme le trapèze.

Nommant 2α l'angle polygonal de l'octogone;

r Le rayon du cercle inscrit de la section transversale *abcdefg*;

i L'aire de cette section;

r' Le rayon du cercle inscrit de la section transversale ABCDEFG;

i' L'aire de cette section;

s Le rayon, $oi = oh$;

$ot = x$, $yz = a$: on a:

$$1 : \cot \alpha = s - \sqrt{(s^2 - x^2)} : w\alpha, \quad w\alpha = \cot \alpha \left[s - \sqrt{(s^2 - x^2)}\right].$$

Donc

$$wx = a + 2 \cot \alpha \left[s - \sqrt{(s^2 - x^2)}\right],$$

et par conséquent la différentielle du corps dont le trapèze

variable est le plan générateur

$$dV = [a + \cot\alpha\,[s - \sqrt{(s^2 - x^2)}]]\,[s - \sqrt{(s^2 - x^2)}]\,dx;$$

ce qui fait pour la partie polygonale :

$$dV = 4[a + \cot\alpha\,[s - \sqrt{(s^2 - x^2)}]].[s - \sqrt{(s^2 - x^2)}]\,dx.$$

Pour la partie circulaire, on a

$$dV = \frac{1}{2}\pi[r + s - \sqrt{(s^2 - x^2)}]^2 dx - \frac{1}{2}\pi r^2\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\pi[2rs + 2s^2 - 2(r + s)\sqrt{(s^2 - x^2)} - x^2]\,dx;$$

donc enfin pour la différentielle de toute cette partie de l'anse, portion à base polygonale, circulaire et intérieure,

$$dV = [i + 4as - 8s\cot.\alpha\sqrt{(s^2 - x^2)} - 4\cot.\alpha x^2 +$$
$$8s^2\cot.\alpha - 4a\sqrt{(s^2 - x^2)} - \frac{1}{2}\pi\,x^2 +$$
$$\pi s\,(s + r) - \pi\,(r + s)\sqrt{(s^2 - x^2)}]\,dx$$
$$= A\,dx + B\,dx\sqrt{(s^2 - x^2)} - Cx^2\,dx + \text{const.}$$

facile à intégrer, et cela entre les limites $x = o$ et $x = s$.

Centre de gravité des anses.

Le centre de l'anse doit se trouver dans le plan *isq*, qui le partage selon la longueur en deux parties symétriques; de plus, il doit se trouver sur la ligne *ss'*, qui partage à son tour ce plan en deux moitiés parfaitement semblables. Pour le trouver, on procède de la manière suivante.

Le centre *z* de la partie prismatique du pied se trouve au milieu de sa hauteur.

Le centre z' de la partie qui réunit cette partie prismatique au corps de l'anse, se trouve en multipliant la formule différentielle

$$A dx - B dx \sqrt{(s^2 - x^2)} - C x^2 dx$$

par x, et l'intégrant entre les mêmes limites on a alors

$$az' = \frac{\int (A x dx - B x dx \sqrt{(s^2 - x^2)} - C x^3 dx)}{\int (A dx - B dx \sqrt{(s^2 - x^2)} - C x^2 dx)};$$

ce qui donne aussi $s'z'$.

Pour avoir le centre du corps de l'anse, on suppose son poids également partagé sur la ligne $\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\theta$ que parcourt le centre de gravité du plan générateur ; dès-lors la recherche du centre susdit est celui de cette même ligne, composé des parties perpendiculaires $\gamma\delta$ et $\eta\theta$, des parties circulaires $\delta\varepsilon$ et $\zeta\eta$ et de la partie horizontale $\varepsilon\zeta$.

Le centre z'' des premières se trouve à son milieu ; le centre de la dernière en z^{IV} ; et pour avoir le centre d'une portion circulaire $\delta\varepsilon$ on a : $xg' = \frac{\text{RK}}{\text{arc } \delta\varepsilon}$, si K est la corde de l'arc, et alors on a facilement la distance $x\mu$, et par conséquent $s'z''$.

Si donc :

v est le volume de la portion prismatique du pied,
d la distance $s'z$,
v' le volume de la partie du pied qui suit,
d' la distance $s'z'$,
v'' le volume de la partie du corps de l'anse depuis γ jusqu'à δ,
d'' la distance $s'z''$,
v''' le volume d'une partie circulaire de l'anse $\delta\lambda\varepsilon$,
d''' la distance $s'z'''$,
v^{IV} le volume de la partie horizontale $\varepsilon\zeta$.
d^{IV} la distance $s'z^{\text{IV}}$;

on aura en nommant Z le centre de l'anse entière et en rapportant tout à la ligne ss',

$$s'Z = \frac{2vd + 2v'd' + 2v''d'' + 2v'''d''' + v^{\text{IV}}d^{\text{IV}}}{2v + 2v' + 2v'' + 2v''' + v^{\text{IV}}}.$$

Ayant trouvé ce centre, on détermine celui des deux anses

qui doit se trouver dans le plan vertical, passant par l'axe du canon ; mais comme les anses sont inclinées par rapport à ce plan, il faut d'abord déterminer la hauteur à laquelle, au-dessus de l'axe du canon, la ligne qui joint les centres des deux anses rencontre le plan vertical. Ce point de rencontre est le centre des deux anses.

Ayant donc indiqué la marche que j'ai employée pour trouver le volume et le centre des différentes parties de la pièce, rien ne sera plus facile que d'en trouver le centre, et le volume de la pièce même.

Soit pour cela :

v le volume de la partie ABC, fig. 1,
d la distance de son centre jusqu'à A,
v' le volume de la partie BCDE,
d' la distance de son centre jusqu'à A,
v'' le volume de la partie DEFG,
d'' la distance de son centre jusqu'à A,
v''' le volume de la partie FGHI,
d''' la distance de son centre jusqu'à A,
v^{IV} le volume de la partie HIKL,
d^{IV} la distance de son centre jusqu'à A,
v^{V} le volume de l'âme de la pièce *abcdef*,
d^{V} la distance de son centre jusqu'à A,
v^{VI} le volume des tourillons,
d^{VI} la distance de leur centre jusqu'à l'origine des momens A,
δ la distance de leur centre au-dessous de l'axe du canon,
v^{VII} le volume des embases des tourillons,
d^{VII} la distance de leur centre jusqu'à l'origine des momens A,
δ' la distance de leur centre au-dessous de l'axe du canon,
v^{VIII} le volume des anses,
d^{VIII} la distance de leur centre jusqu'à l'origine des momens A,
δ'' la distance de leur centre au-dessus de l'axe,
G le centre de la pièce.

On aura pour la distance de ce centre jusqu'à A :

$$= \frac{M}{v + v' + v'' + v''' + v^{\text{IV}} - v^{\text{V}} + v^{\text{VI}} + v^{\text{VII}} + v^{\text{VIII}}};$$

en faisant

$$M = vd + v'd' + v''d'' + v'''d''' + v_{IV}d^{IV} - v^{V}d^{V} + v^{VI}d^{VI} + v^{VII}d^{VII} + v^{VIII}d^{VIII}$$

on aura pour la distance au-dessous de l'axe du canon

$$= \frac{v^{VI}\,\delta + v^{VII}\,\delta' - v^{VIII}\,\delta''}{v^{VI} + x^{VII} - v^{VIII}}.$$

Le résultat obtenu par quatre des lieutenans-instructeurs, fut à peu près le même, quoiqu'ils eussent opéré d'une manière différente; je le communiquerais ici s'il ne se fût égaré; au reste, nous approchâmes par nos calculs jusqu'à 4—5 livres du poids moyen, ce qui ne peut être imputé comme une faute, puisque sur un poids moyen de 2850 kilogrammes, ces canons diffèrent quelquefois de 100 kilogrammes; tous, nous trouvâmes le centre de gravité trop en avant du véritable centre qui doit naturellement correspondre avec celui des anses. La différence sur ce point, entre les calculateurs, était pour ainsi dire zéro, puisque nous étions d'accord dans les quatre premières décimales. Cependant cette quantité dont nous trouvâmes le centre de gravité en avant du centre réel, était assez considérable. La raison en est fort simple, d'après mon opinion, puisque les masses de métal fluide se projetant avec force dans le moule, doivent par cette force de projection et par leur pression naturelle, comprimer inégalement les différentes parties de la pièce, déranger l'égale densité du canon, et renverser ainsi l'hypothèse qui était notre point de départ.

Qu'il me soit permis à la fin de ma tâche de prier MM. les membres de la *Société des sciences naturelles*, de jeter un coup-d'œil sur les deux questions suivantes, que je crois offrir quelqu'interêt.

Première question. La position du centre de gravité réel, et celle calculée d'après l'hypothèse d'une densité uniforme étant connues, ainsi que le poids et la forme des différentes

parties du canon, peut-on déterminer d'après quelle loi cette densité augmente, en avançant vers la culasse?

Deuxième question. Est-il possible d'intégrer autrement que par des séries les formules différentielles, que j'ai employées pour trouver le volume et le centre des embases des tourillons, et qui étaient de la forme

$$dy = 2\,dx\sqrt{R^2 - x^2}\left[a - \sqrt{[s^2 - (b - x)^2]}\right]$$

et dans le cas où il faudrait absolument les intégrer par des séries, quelle serait la manière d'en trouver une très-convergente ?

Étant donnée une courbe fermée, déterminer 1° *un point tel que la somme de ses distances à tous les points de cette courbe soit un minimum;* 2° *un point tel que la somme de ses distances à tous les points de la courbe soit un maximum. On exige que ce dernier point soit dans l'intérieur de la courbe.* Question proposée par M. QUETELET, à la pag. 204 du tom. IV, et développée par M. REISS, docteur en sciences.

I.

Problème. Soit S la circonférence entière ou une partie comprise entre des limites connues d'une courbe donnée par son équation, soit O un point quelconque; on demande la moyenne arithmétique des rayons vecteurs menés de O à tous les points de la courbe S.

Pour résoudre ce problème, il convient de diviser la courbe S suivant une loi quelconque en une infinité de petits arcs, et de ne considérer que les rayons menés aux points de division. Or, il est évident que la moyenne arithmétique de tous les rayons variera avec le mode de division adopté. Pour

fixer ce dernier, je supposerai une seconde courbe dont la position soit déterminée de manière ou d'autre; j'en diviserai la partie Σ interceptée par les rayons menés aux extrémités de S en une infinité de parties égales, et je considèrerai tous les rayons vecteurs menés de O à la courbe S comme passant par les points de division de Σ.

Les cas les plus simples ont lieu 1° si Σ se confond avec S; 2° si Σ est un arc de cercle dont le centre est O, et dont le rayon $= 1$.

Soit maintenant A l'une des extrémités de S, α l'extrémité de Σ située sur le même rayon $O\alpha A$; soit $O\mu M$ un autre rayon quelconque; faisons

$$OM = \rho; \quad \text{angle } AOM = \varphi; \quad \text{arc } \alpha\mu = \sigma.$$

Quelle que soit l'équation de S, nous pourrons établir l'équation polaire $\rho = f(\varphi)$; or, l'équation donnée Σ nous conduira à $\varphi = \chi(\sigma)$, d'où nous tirons

$$\rho = F(\sigma) = \alpha + \beta\sigma + \gamma\sigma^2 + \delta\sigma^3 + \ldots.$$

Il est bon d'observer que les coëfficiens α, β, γ, ... sont variables avec les coordonnées du point O.

Supposons que la courbe Σ soit divisée en n parties égales, de sorte que $\Sigma = n\sigma$; désignons par ρ^0 le rayon vecteur qui passe par l'extrémité α de Σ, par ρ' celui qui passe par le premier point de division, par ρ'' celui qui passe par le second point de division, etc.; nous trouverons

$$\begin{aligned}
\rho^0 &= \alpha \\
\rho' &= \alpha + \beta\sigma.1 + \gamma\sigma^2 1^2 + \delta\sigma^3 1^3 + \ldots \\
\rho'' &= \alpha + \beta\sigma.2 + \gamma\sigma^2 2^2 + \delta\sigma^3 2^3 + \ldots \\
&\vdots \\
\rho^n &= \alpha + \beta\sigma.n + \gamma\sigma^2 n^2 + \delta\sigma^3 n^3 + \ldots
\end{aligned}$$

partant, $\rho^0 + \rho' + \rho'' + \ldots + \rho^n =$

$$\begin{aligned}
(n+1)\alpha &+ \beta\sigma(1 + 2 + \ldots + n) \\
&+ \gamma\sigma^2(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) \\
&+ \delta\sigma^3(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}$$

Faisons ici en général

$$1^{\mu}+2^{\mu}+\ldots+n^{\mu}=S_n^{\mu},$$

nous trouverons

$$S_{n+1}^{\mu+1}-1=$$

$$2^{\mu+1}+3^{\mu+1}+\ldots+(n+1)^{\mu+1}=(1+1)^{\mu+1}+(2+1)^{\mu+1}$$
$$+\ldots+(n+1)^{\mu+1}$$
$$=1^{\mu+1}+(\mu+1)1^{\mu}+\frac{(\mu+1)\mu}{1.2}1^{\mu-1}+\ldots+(\mu+1)\,1+1$$
$$+2^{\mu+1}+(\mu+1)\,2^{\mu}+\frac{(\mu+1)\mu}{1.2}2^{\mu-1}+\ldots+(\mu+1)\,2+1$$
$$\vdots$$
$$+n^{\mu+1}+(\mu+1)n^{\mu}+\frac{(\mu+1)\mu}{1.2}n^{\mu-1}+\ldots+(\mu+1)\,n+1$$
$$=S_n^{\mu+1}+(\mu+1)S_n^{\mu}+\frac{(\mu+1)\mu}{1.2}S_n^{\mu-1}+\ldots+(\mu+1)S_n^{1}+n.$$

En considérant que

$$S_{n+1}^{\mu+1}-S_n^{\mu+1}=(n+1)^{\mu+1},$$

nous obtiendrons, toute réduction faite;

$$S_n^{\mu}=(n+1)\frac{(n+1)^{\mu}-1}{\mu+1}-\left(\frac{\mu}{2}S_n^{\mu-1}+\ldots+S_n^{1}\right).$$

La question exige que n soit infiniment grand; or, quoique μ le puisse devenir de son côté, il n'y a pas de doute qu'on ne puisse toujours admettre μ infiniment petit par rapport à n;

nous établirons dans ce cas

$$S_n^\mu = (n+1)\frac{n^\mu}{\mu+1},$$

et $\rho^0 + \rho' + \rho'' + \ldots + \rho^n =$

$$(n+1)\left(\alpha + \frac{\beta n\sigma}{2} + \frac{\gamma n^2\sigma^2}{3} + \frac{\delta n^3\sigma^3}{4} + \ldots\right)$$

$$= (n+1)\left(\alpha + \frac{\beta\Sigma}{2} + \frac{\gamma\Sigma^2}{3} + \frac{\delta\Sigma^3}{4} + \ldots\right).$$

De là il suit enfin que la moyenne arithmétique cherchée (soit M) est égale à

$$M = \alpha + \frac{\beta\Sigma}{2} + \frac{\gamma\Sigma^2}{3} + \frac{\delta\Sigma^3}{4} + \ldots = \frac{1}{\Sigma}\int\rho d\sigma, \left(\begin{matrix}\sigma = 0\\ \sigma = \Sigma\end{matrix}\right).$$

II.

Jetons maintenant un coup d'œil sur la question proposée. Il est clair qu'il s'agira de déterminer les coordonnées du point O de telle sorte que $\frac{1}{\Sigma}\int\rho d\sigma$ entre les limites indiquées devienne un *minimum* ou un *maximum*. Mais le *maximum absolu* ne saurait avoir lieu que quand le point O est à une distance infiniment grande des courbes S et Σ. Le *minimum* et les *maxima relatifs* se détermineront dans chaque cas donné d'après les procédés connus de l'analise. Remarquons encore que la solution qu'on vient de donner ne se rapporte pas seulement aux courbes fermées, mais en général à des portions données d'une courbe quelconque.

Avant de passer à quelques applications particulières, démontrons le théorème suivant :

Théorème. Soient S et Σ des courbes à centre, situées de telle manière que le premier et le second axe de Σ tombent respectivement sur le premier et le second axe de S. La

moyenne arithmétique de tous les rayons vecteurs menés du centre commun à S, et passant par tous les points de division de Σ, sera moindre que celle des rayons vecteurs qui, passant par les mêmes points de division, partent d'un autre point quelconque.

Soit C le centre commun; $ACB = 2a$ le premier axe de S; $MCm = 2r$ un diamètre quelconque; si nous faisons l'angle $ACM = \varphi$, nous pourrons établir

$$r = a - (\alpha \sin.\varphi^2 + \beta \sin.\varphi^4 + \ldots).$$

Supposons de plus que le point O soit situé sur un diamètre aCb; faisons l'angle $ACa = v$; $CO = R$; $MO = \rho$; nous aurons

$$\rho = \sqrt{[R^2 + r^2 - 2Rr\cos.(\varphi - v)]}.$$

Si, comme plus haut, nous désignons par σ l'arc de Σ compris entre l'extrémité a et le rayon OM, nous tirerons de l'équation de Σ

$$\sigma = f(\varphi);\quad d\sigma = f'(\varphi).d\varphi;$$

il est important de remarquer que ni σ ni $d\sigma$ ne dépendent de R.

Ensuite nommons O′ le point de aCb qui a la même distance centrale que O. Ce diamètre divisant les courbes S et Σ chacune en deux parties parfaitement égales, et les points de division de Σ ne dépendant pas de la position de O; il est évident que la moyenne arithmétique des rayons vecteurs menés de O à l'une des demi-circonférences de S pourra être remplacée par celle des rayons vecteurs menés de O′ à l'autre des demi-circonférences. Du reste le nombre des rayons à l'une des demi-circonférences sera évidemment égal à celui des rayons menés à l'autre des demi-circonférences; d'où nous concluons que la moyenne arithmétique totale sera égale à la moitié de la somme des moyennes arithmétiques partielles.

Faisons donc

$$O'M = \rho' = \sqrt{[R^2 + r^2 + 2Rr \cos.(\varphi - v)]};$$

nous trouverons la moyenne arithmétique des rayons vecteurs menés à la demi-circonférence $aMb =$

$$\frac{2}{\Sigma}\int d\varphi . f'(\varphi).\rho\,, \quad \left(\begin{matrix}\sigma = o \\ \sigma = \frac{\Sigma}{2}\end{matrix} \text{ ou } \begin{matrix}\varphi = \nu \\ \varphi = 180^\circ + \nu\end{matrix}\right);$$

puis, celle des rayons vecteurs menés à l'autre demi-circonférence =

$$\frac{2}{\Sigma}\int d\varphi . f'(\varphi).\rho'\,, \quad \left(\begin{matrix}\varphi = \nu \\ \varphi = 180^\circ + \nu\end{matrix}\right);$$

de là nous tirons enfin

$$M = \frac{1}{\Sigma}\int d\varphi f'(\varphi).(\rho + \rho'), \quad \left(\begin{matrix}\varphi = \nu \\ \varphi = 180^\circ + \nu\end{matrix}\right).$$

Faisons ici, pour abréger, $R^2 + r^2 = A$; $2r \cos.(\varphi - v) = B$, nous aurons

$$\rho + \rho' = \sqrt{A}\left[\sqrt{\left(1 - \frac{BR}{A}\right)} + \sqrt{\left(1 + \frac{BR}{A}\right)}\right]$$

$$= 2\left(\sqrt{A} - \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{B^2R^2}{B^{\frac{3}{2}}} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{B^4R^4}{A^{\frac{7}{2}}} \ldots\right).$$

Si nous développons la quantité

$$\sqrt{A} = \sqrt{[R^2 + [a - (\alpha \sin. \varphi^2 + \beta \sin. \varphi^4 + \ldots)]^2]}$$

suivant les puissances de $\sin. \varphi^2$, il est clair que R ne peut entrer dans les coefficiens que sous la forme $\sqrt{(R^2 + a^2)}^{\pm m}$. Or, B ne contenant pas R, on voit sans difficulté qu'on parviendra ensuite de l'intégration à une expression de M dont

tous les termes sont de la forme

$$N.\sqrt{(R^2+a^2)}\pm^k.\ R^{2l};$$

N désignant une fonction quelconque de v, indépendante de R.

Maintenant, pour déterminer les valeurs de R et de v qui rendent M un *minimum*, il faudra établir les équations $\frac{dM}{dR}=o$; $\frac{dM}{dv}=o$. En donnant à N'... N^m des significations semblables à celle de N, il résultera de la première de ces équations

$$o=R\,[N'+\ldots+N^m.\sqrt{(R^2+a^2)}\pm^k.\ R^{2\lambda}+\ldots];$$

équation à laquelle on satisfait en faisant $R=o$. Ainsi donc, quelle que soit la valeur de v, le centre sera toujours le point pour lequel la moyenne arithmétique devient un *minimum*.

Pour ce qui est de la seconde partie de la question proposée, on pourrait demander quels sont les points de la courbe S même, jouissant de la propriété que la moyenne arithmétique des rayons qui en sont menés à tous les points de S devienne un *maximum* ou un *minimum*. Cette question, traitée dans sa plus grande généralité, pourrait bien présenter quelques difficultés analitiques. Du reste, elle exigerait de trop longs développemens pour entrer dans cet article.

III.

Il nous reste à faire quelques applications de la formule que nous avons trouvée pour la moyenne arithmétique M. La comparaison des résultats qu'on obtient en admettant différens modes de division ne laisse pas d'offrir quelque intérêt. Calculons donc dans les deux suppositions les plus simples, savoir : 1° celle où Σ se confond avec S; 2° celle où Σ est un arc de cercle, dont le centre est O, et dont le rayon $=1$.

1° L'équation de l'*ellipse*, par rapport au centre comme

origine des coordonnées, et au premier axe comme axe des abscisses, est $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$; a et b désignant respectivement les moitiés du premier et du second axe; x et y les coordonnées d'un point quelconque m de l'ellipse. Cherchons d'abord les valeurs *minima* de la moyenne arithmétique, qui ont lieu dans les deux suppositions si le point O se trouve au centre de l'ellipse. Si nous faisons $x = a \cos. \delta$, nous trouverons $y = b \sin. \delta$. Ainsi donc, en nommant ρ le rayon mené du centre à m, et s l'arc elliptique compris entre l'extrémité du premier axe et le point m, nous aurons

$$\rho = \sqrt{(a^2 \cos. \delta^2 + b^2 \sin. \delta^2)}; \; ds = d\delta. \sqrt{(a^2 \sin. \delta^2 + b^2 \cos. \delta^2)}.$$

Il est évident que la moyenne arithmétique des rayons étendue à toute la circonférence elliptique (S), équivaudra dans l'une et l'autre supposition à celle qui ne s'étend qu'à un quart de circonférence intercepté par le premier et le second axe. On établira donc dans la première supposition $\Sigma = S$, $\sigma = s$, et

$$M = \frac{4}{S} \int \rho ds, \begin{pmatrix} x = a & \text{ou} & \delta = 0 \\ x = 0 & & \delta = \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{4}{S} \int d\rho \sqrt{(a^2 \cos. \delta^2 + b^2 \sin. \delta^2)(a^2 \sin. \delta^2 + b^2 \cos. \delta^2)};$$

ou bien, en faisant

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \alpha; \quad \frac{\alpha^2}{2 - \alpha^2} = \beta; \quad 4\delta = \varepsilon;$$

$$M = \frac{a^2 + b^2}{2S} \sqrt{\frac{2 - \alpha^2}{2}} \int d\varepsilon \sqrt{(1 - \beta \cos. \varepsilon)}, \begin{pmatrix} \varepsilon = 0 \\ \varepsilon = 2\pi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\pi(a^2 + b^2)}{S} \sqrt{\frac{2 - \alpha^2}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1.1}{2.4} \beta^2 - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} \beta^4 - \ldots\right).$$

Ensuite, de l'équation de ds, nous tirons

$$S = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1.1}{2.4} \alpha^2 - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} \alpha^4 - \ldots\right).$$

Admettons pour plus de simplicité que l'excentricité de l'ellipse soit égale au second axe; c'est-à-dire que $a^2 = 2b^2$. Dans ce cas nous aurons $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{17}$, et

$$M = \frac{a^2\pi}{2S}\sqrt{\frac{17}{2}}.\,0{,}999784;$$

$$S = a\pi\sqrt{3.0{,}992865};$$

donc

$$M = a.0{,}84749.$$

Calculons maintenant la valeur *minimum* de M d'après la seconde supposition, et retenons les signes dont nous nous sommes déjà servis. Puisque l'arc σ est dans ce cas la mesure de l'angle formé par le premier axe et le rayon ρ, nous aurons, en ne considérant qu'un quart de la circonférence elliptique,

$$\Sigma = \frac{\pi}{2};\quad \rho = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \sin.\sigma^2 + b^2 \cos.\sigma^2)}};$$

ainsi donc

$$M = \frac{2ab}{\pi}\int\frac{d\sigma}{\sqrt{(a^2 \sin.\sigma^2 + b^2 \cos.\sigma^2)}},\begin{pmatrix}\sigma = o\\ \sigma = \frac{\pi}{2}\end{pmatrix},$$

faisons $\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \gamma$, nous trouverons

$$M = \frac{2a}{\pi}\int\frac{d\sigma}{\sqrt{(1 + \gamma \sin.\sigma^2)}},\begin{pmatrix}\sigma = o\\ \sigma = \frac{\pi}{2}\end{pmatrix}$$

$$= a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\gamma + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\gamma^2 - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\gamma^3 \pm \ldots\right].$$

Égalons a^2, comme nous l'avons fait plus haut, à $2b^2$, il viendra $\gamma = 1$,

$$M = a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \pm \ldots\right]$$

$$= a.0{,}8346.$$

On voit donc que dans cette supposition la valeur de M est un peu plus petite que dans la première.

L'expression de M, que nous venons de trouver, est plus élégante que commode au calcul; mais il ne sera pas difficile d'en établir d'autres qui soient beaucoup plus convergentes. Nous avons trouvé

$$\int\frac{d\sigma}{\sqrt{(1+\gamma\sin.\sigma^2)}},\begin{pmatrix}\sigma=o\\ \sigma=\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}=\frac{\pi}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\gamma+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\gamma^2\mp\ldots\right);$$

mais nous pourrons aussi établir, en faisant

$$\frac{\gamma}{1+\gamma}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\delta;\ \frac{\gamma}{2+\gamma}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\alpha\ (\textit{voyez}\ \text{plus haut});$$

$$2\sigma=\zeta;$$

$$\int\frac{d\sigma}{\sqrt{(1+\gamma\sin.\sigma^2)}},\begin{pmatrix}\sigma=o\\ \sigma=\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}=\frac{b}{a}\int\frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\delta\cos.\sigma^2)}},\begin{pmatrix}\sigma=o\\ \sigma=\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\int\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\alpha\cos.\zeta)}},\ \begin{pmatrix}\zeta=o\\ \zeta=\pi\end{pmatrix}.$$

La première de ces expressions devient =

$$\frac{b\pi}{2a}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\delta+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\delta^2+\ldots\right);$$

et la seconde =

$$\frac{b\pi}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}\alpha^2+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\alpha^4+\ldots\right).$$

Si nous admettons $a^2=2b^2$, il viendra

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\mp\ldots=\sqrt{\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\right.}$$

$$\left.+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4+\ldots\right]};$$

expressions dont la dernière est évidemment la plus convenable au calcul.

On peut aussi remarquer que si l'on fait $b = o$, on obtient

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1.3}{1.4}\right)^2+\ldots=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}+\ldots\right)$$

2° Occupons-nous maintenant des valeurs que prend M, si le point O se trouve à l'extrémité du premier ou du second axe. L'équation de l'ellipse par rapport à l'extrémité du premier axe (soit A) comme origine des coordonnées, et au premier axe comme axe des abscisses est $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$. Or, si a désigne la moitié du second axe et b celle du premier, la même équation subsistera encore, mais par rapport à l'extrémité du second axe (soit A′) comme origine des coordonnées, et au second axe comme axe des abscisses. Nommons donc ρ le rayon mené de A (ou de A′) à un point quelconque m de l'ellipse, et φ l'angle formé par le rayon ρ et le premier (ou le second) axe. Nous établirons $x = \rho \cos.\varphi$; $y = \rho \sin.\varphi$; et

$$\rho = 2ab^2 \frac{\cos.\varphi}{a^2 \sin.\varphi^2 + b^2 \cos.\varphi^2}.$$

On voit sans peine que dans les deux suppositions la moyenne arithmétique étendue à toute la circonférence elliptique sera la même que celle qui ne comprend que l'une des demi-circonférences soutendues par le premier ou le second axe.

L'expression de M suivant la première supposition ne s'obtiendrait qu'au moyen d'une intégration plus compliquée qu'intéressante. Supposons donc au lieu d'une ellipse un cercle, c'est-à-dire, faisons $a = b$. Nous aurons alors $S = \Sigma = 2a\pi$; $s = \sigma = a(\pi - 2\varphi)$; $\rho = 2a \cos.\varphi$; et

$$M = -\frac{4a}{\pi}\int \cos.\varphi.\,d\varphi,\ \left(\begin{matrix}\varphi=\frac{\pi}{2}\\ \varphi=0\end{matrix}\right) = \frac{4a}{\pi}.$$

Dans la seconde supposition on a pour l'ellipse, $\Sigma = \pi$, $\sigma = \varphi$; par conséquent

$$M = \frac{4ab^2}{\pi} \int \frac{\cos.\sigma.d\sigma}{a^2 \sin.\varphi^2 + b^2 \cos.\varphi^2}, \left(\begin{matrix}\sigma = \frac{\pi}{2} \\ \sigma = o\end{matrix}\right);$$

ou bien, si l'on fait $\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \pm \alpha^2$, selon que a désigne la moitié du premier ou la moitié du second axe, c'est-à-dire, selon que le point O se trouve en A ou en A',

$$M = \frac{4a}{\pi} \int \frac{d \sin.\sigma}{1 \pm \alpha^2 \sin.\sigma^2}, \left(\begin{matrix}\sigma = \frac{\pi}{2} \\ \sigma = o\end{matrix}\right);$$

ainsi donc, si le point O est en A,

$$M = \frac{4ab}{\pi\sqrt{a^2 - b^2}} \text{arc tang.} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b};$$

et si le point O se trouve en A' et que l'on transforme a en b et *vice versa*

$$M = \frac{4ab}{\pi\sqrt{a^2 - b^2}} \log. \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

Dans le cas du cercle, l'une ou l'autre de ces valeurs qui doivent alors être identiques, nous fournira

$$M = \frac{o}{o} = \frac{4a}{\pi}.$$

On en déduira la propriété inattendue que *la moyenne arithmétique des rayons partant d'un point de la circonférence circulaire est la même dans les deux suppositions.*

Faisons encore $a^2 = 2b^2$, nous trouverons si O est situé en A

$$M = a;$$

et si O est situé en A'

$$M = a.\ 1{,}1222.$$

Nous apprenons que *la moyenne arithmétique est dans le premier cas égale à la moitié du premier axe; et plus petite que dans le second cas.*

3° Appliquons encore notre formule au cas où le point O se trouve à l'un des foyers de l'ellipse (soit F). Dans la première supposition nous pourrons remplacer la moyenne arithmétique des rayons menés de F à l'une des demi-circonférences elliptiques soutendues par le premier axe, par celle des rayons menés de l'autre foyer à l'autre demi-circonférence. De plus, par un raisonnement analogue à celui qu'on a fait plus haut (*voy.* II), on se persuadera que la moyenne arithmétique étendue à la circonférence elliptique entière est égale à la moitié de la somme des moyennes arithmétiques étendues aux deux demi-circonférences respectives. Par conséquent, si m représente un point quelconque de l'ellipse, et que nous fassions $Fm = \rho$, $F'm = \rho'$; nous aurons $\Sigma = S$, $\sigma = s$, et

$$M = \frac{1}{S}\int ds.(\rho + \rho'), \begin{pmatrix} s = o \\ s = \frac{S}{2} \end{pmatrix} = a;$$

c'est-à-dire, que *la moyenne arithmétique est dans cette supposition égale à la moitié du premier axe.*

Dans la seconde supposition, il nous sera permis de ne considérer que l'une des demi-circonférences soutendues par le premier axe. On a alors, en nommant φ l'angle formé par le rayon ρ et le premier axe,

$$\rho = \frac{x\sqrt{a^2 - b^2} - a^2}{a};\ \text{tang.}\ \varphi = \frac{b}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x - \sqrt{a^2 - b^2}};$$

$$d\varphi = b\frac{dx}{\rho\sqrt{a^2 - x^2}};$$

par conséquent

$$M = \frac{b}{\pi}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \begin{pmatrix} x = + a \\ x = - a \end{pmatrix} = b ;$$

c'est-à-dire, que *la moyenne arithmétique sera dans la seconde supposition égale à la moitié du second axe.*

Il pourrait paraître surprenant que cette valeur est plus petite que la valeur *minimum* dans la supposition $a^2 = 2b^2$, que nous avons trouvée $= a.0,8346 = b.1,1003$. Mais on n'a qu'à se rappeler que les valeurs *minima* ne se rapportent qu'aux cas où le premier et le second axe de Σ, tombent respectivement sur le premier et le second axe de S; et en effet, si nous établissions le centre de Σ au centre de l'ellipse, nous trouverions $M = a$, comme dans la première supposition. Il est bon de remarquer qu'en général, la question du *minimum* ne peut être résolue que quand on connaît l'équation et la position de Σ.

4° Ces exemples pourraient suffire pour mettre en évidence la nature de la question proposée. Nous allons cependant y ajouter encore un autre concernant l'*hélice d'Archimède*. Supposons que le point O est situé au centre du cercle générateur (soit C), et cherchons les valeurs de la moyenne arithmétique étendue à la partie de l'hélice qui est inscrite dans le cercle (soit S). Nommons a le rayon du cercle; ρ le rayon vecteur mené de C à un point quelconque de l'hélice, et $a\varphi$ l'arc du cercle intercepté par le diamètre touchant l'hélice et le prolongement de ρ. Nous aurons

$$\rho = \frac{a\varphi}{2\pi}.$$

Dans la première supposition, nous établirons

$$\Sigma = S;\ d\sigma = d\varphi.\sqrt{\left(\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\varphi^2}\right)} = \frac{a}{2\pi}.d\varphi.\sqrt{1 + \varphi^2}$$

et

$$M = \frac{a^2}{4\pi^2 S}\int d\varphi.\,\varphi\sqrt{1 + \varphi^2}, \begin{pmatrix} \varphi = 0 \\ \varphi = 2\pi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{a}{12\pi^2 S}(1 + 4\pi^2)^{\frac{3}{2}};$$

or, l'équation de $d\sigma$ nous fournit

$$\Sigma = S = \frac{a}{4\pi}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \log(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})];$$

donc

$$M = \frac{a}{3\pi} \cdot \frac{(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \log.(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})}$$
$$= a.0{,}64275.$$

Dans la seconde supposition, nous aurons $\Sigma = 2\pi$, $\sigma = \varphi$, et

$$M = \frac{a}{4\pi^2}\int \varphi d\varphi, \left(\begin{matrix}\varphi = 0 \\ \varphi = 2\pi\end{matrix}\right) = \frac{a}{2};$$

c'est-à-dire que *dans la seconde supposition la moyenne arithmétique est égale à la moitié du rayon du cercle générateur.*

Il est assez curieux de remarquer que les résultats qu'on obtient en calculant suivant la seconde supposition, sont tous plus petits que ceux que nous fournit la première.

IV.

Il y a encore plusieurs questions plus compliquées qui se rattachent à la formule que nous avons trouvée au commencement de cet article. Je ne mentionnerai que la suivante, qui me paraît présenter quelqu'intérêt.

On demande le lieu géométrique des points O, *pour lesquels la moyenne arithmétique, par rapport à une courbe et un mode de division donnés, soit constante.*

Choisissons le cas le plus simple, savoir celui où la courbe donnée est une ligne droite $AB = l$, et calculons suivant la première supposition. Soit O un point quelconque, OP la perpendiculaire abaissée de O sur l; faisons $AP = x$, $OP = y$. Soit de plus m un point de l situé entre A et P; faisons $Pm = \xi$,

$Om = \rho = \sqrt{(y^2 + \xi^2)}$. Or, si nous nommons M′ la moyenne arithmétique étendue à la partie AP de l, nous trouverons $\Sigma = x$, $d\sigma = d\xi$, et

$$M' = \frac{1}{x}\int d\xi.\sqrt{(y^2 + \xi^2)}, \ \binom{\xi = o}{\xi = x}$$

$$= \frac{1}{2x}\left(x\sqrt{(x^2 + y^2)} + y^2 \log. \frac{x + \sqrt{(x^2 + y^2)}}{y}\right).$$

Puis, si nous désignons par M″ la moyenne arithmétique étendue à la partie BP, il viendra M″ =

$$\frac{1}{2(l-x)}\left((l-x)\sqrt{[(l-x)^2+y^2]}+y^2 \log. \frac{l-x+\sqrt{[(l-x)^2+y^2]}}{y}\right)$$

Nommons enfin M la moyenne arithmétique étendue à toute la ligne l. En considérant que cette ligne est censée être divisée en une infinité de parties égales, on verra sans peine que le nombre des rayons menés à la partie AP est à celui des rayons menés à la partie BP comme x à $l - x$; partant

$$2Ml = 2M'x + 2M''(l-x) = \text{const.} =$$

$$x\sqrt{(x^2 + y^2)} + y^2 \log. \frac{x + \sqrt{(x^2 + y^2)}}{y}$$

$$+ (l-x)\sqrt{[(l-x)^2 + y^2]} + y^2 \log. \frac{l - x + \sqrt{[(l-x)^2 + y^2]}}{y};$$

ce qui est l'équation assez compliquée de la courbe cherchée. Nous en tirons aussi l'équation différentielle

$$o = \left[\sqrt{(x^2 + y^2)} - \sqrt{[(l-x)^2 + y^2]}\right] dx$$

$$+ y \log. \frac{[x + \sqrt{(x^2 + y^2)}]\left[l - x + \sqrt{[(l-x)^2 + y^2]}\right]}{y^2} dy.$$

Ce serait un travail très-intéressant que de rechercher les propriétés de cette courbe. Je dois ici me contenter d'en avoir

établi les équations principales, et je me hâte de terminer cet article en signalant aux personnes qui s'intéressent à ce genre de questions les deux problèmes suivans, qui ont beaucoup de rapport avec celui qui nous a occupés jusqu'ici.

1° *Étant données une courbe* S, *et une ligne droite* L, *déterminer la moyenne arithmétique des angles formés par* L *et les lignes tangentes à* S.

2° *Étant donées une courbe* S, *et un point* O, *déterminer la moyenne arithmétique des angles formés par les lignes tangentes à* S *et les rayons vecteurs menés de* O *aux points respectifs de* S.

Cette dernière question principalement, mériterait bien une attention sérieuse, en tant qu'elle se rattache à la courbure des lignes courbes.

De la mesure des volumes que décrivent autour d'un axe extérieur, un demi-segment, un secteur et un segment circulaires; par J. N. Noel, principal de l'athénée de Luxembourg.

La méthode des premières puissances des nombres naturels que nous avons donnée, tom. Ier de la *Correspondance*, pour remplacer le calcul différentiel et intégral dans certaines recherches, nous a servi alors à résoudre plusieurs problèmes importans de géométrie et de mécanique. Voici encore un problème facile à traiter, d'après cette méthode :

Trouver le volume décrit par un demi-segment circulaire autour d'un axe extérieur dans le même plan, et parallèle à la flèche de ce segment.

Cherchons d'abord le volume décrit par le demi-segment APN, autour de l'axe MU, parallèle à la flèche PN $= d$ (*fig.* 6 et 7). Du centre O, menons OH perpendiculaire à MU, et prenons OH $= a$ et le rayon OA $= r$. Divisons la flèche PN ou d en un nombre infini n de parties égales à x, de manière

que $d = nx$. Par chaque point de division, menons une perpendiculaire à PN ; nous partagerons ainsi le demi-segment APN en n tranches, toutes de même hauteur x. Soit DRKC $= t_\nu$ la ν^{me} de ces tranches, à partir de N ; nous aurons donc $NR = x\nu$ et $DR^2 = x\nu\ (2r - x\nu) = 2rx\nu - x^2\nu^2$. La hauteur x étant infiniment petite, il est clair que la ν^{me} tranche DRKC peut être considérée comme un rectangle, dont l'aire est par conséquent $t_\nu = DR \times x$. Ainsi le volume décrit par ce rectangle, autour de l'axe MU, a pour mesure $\pi x\ (DR + a)^2 - \pi a^2 x$, lorsque l'arc AN est concave vers l'axe MU, et $\pi a^2 x - \pi x\ (a - DR)^2$, quand l'arc AN est convexe vers le même axe ; ce qui donne, dans le premier cas, volume $DRKC = t_\nu . 2\pi a + (2\pi r x^2 \nu - \pi x^3 \nu^2)$, et dans le second, volume $DRKC = t_\nu . 2\pi a - (2\pi r x^2 \nu - \pi x^3 \nu^2)$. On a par conséquent, pour les deux cas,

$$\text{vol. } DRKC = t_\nu . 2\pi a \pm (2\pi r x^2 \nu - \pi x^3 \nu^2).$$

Prenant successivement $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, on aura successivement les volumes décrits autour de MU par les tranches qui composent le demi-segment APN ; la somme de tous ces volumes sera donc celui décrit par ce demi-segment. Ainsi à cause de x infiniment petite et de $nx = d$, les quantités $x^2\nu$ et $x^3\nu_2$ donneront $\frac{1}{2}\ d^2$ et $\frac{1}{3}\ d^3$ (Voyez tom. I[er] de la *Correspondance*, pag. 127) : en outre, comme $t_1\ t_2 + t_3 + \ldots + t_n = APN$, il viendra

$$\text{vol. } APN = APN . 2\pi a \pm (\pi r d^2 - \frac{1}{3} \pi d^3) \ldots . (1)$$

Dans cette formule, on prendra le signe + ou le signe —, suivant que l'arc AN sera concave ou convexe vers l'axe MU.

Pour le demi-segment BQN et en faisant $QN = d'$, on trouverait de même

$$\text{vol. } BQN = BQN . 2\pi a + (\pi r d'^2 - \frac{1}{3} \pi d'^3).$$

Retranchant de cette équation la précédente, décomposant en

facteurs et posant $d' - d = QP = h$, on aura

$$\text{vol. QBAP} = \text{QBAP}.2\pi a \pm [\pi rh(d+d') - \frac{1}{3}\pi h(d^2 + dd' + d'^2)].$$

On peut donner à cette expression une autre forme ; car soient les demi-cordes $AP = b$ et $BQ = c$; on aura donc $b^2 = 2dr - d^2$ et $c^2 = 2d'r - d'^2$; d'où $b^2 + c^2 = 2r(d + d') - (d^2 + d'^2)$. Mais l'équation $d' - d = h$, donne $d^2 + d'^2 = h^2 + 2dd'$; ainsi $b^2 + c^2 = 2r(d + d') - (h^2 + 2dd')$, ou $r(d+d') = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) + \frac{1}{2}h^2 + dd'$. Substituant cette valeur et celle de $d^2 + d'^2$ dans l'expression de vol. QBAP et réduisant, on trouvera

$$\text{vol. QBAP} = \text{QBAP}.2\pi a \pm [\frac{1}{2}\pi h(b^2 + c^2) + \frac{1}{6}\pi h^3] \ldots (2)$$

Si l'axe passait par le centre O et que le demi-segment QBAP devînt égal au demi-cercle, le volume décrit serait la sphère ; et comme alors a, b et c seraient nuls et $h = 2r$, il viendrait $\frac{1}{6}\pi h^3$ ou $\frac{4}{3}\pi r^3$, pour le volume de la sphère.

Lorsque l'axe passe par le centre O, ou que a est nul, le demi-segment QBAP, dans la figure 6, décrit le segment sphérique S', à deux bases πb^2 et πc^2 ; et alors on a

$$S' = \frac{1}{2}(\pi b^2 + \pi c^2)h + \frac{1}{6}\pi h^3 ;$$

ce qui fournit l'énoncé connu.

D'après cette valeur du segment sphérique, la formule (2) nous apprend que *le volume décrit par la révolution d'un demi-segment circulaire, à une ou deux bases, autour d'un axe extérieur perpendiculaire à ces bases, a pour mesure l'aire de ce demi-segment multipliée par la circonférence que décrit son centre, plus ou moins le segment sphérique que décrirait le même demi-segment autour d'un diamètre parallèle à l'axe ;* (plus *si l'arc du demi-segment est concave et* moins *s'il est convexe vers l'axe proposé.*)

Corollaire I. Il est clair que, quand l'arc AN est concave

vers MU, on a vol. OAP $= \frac{1}{3}\pi.OP.[(a+b)^2 + a(a+b) + a^2]$ $- \pi.OP.a^2 = \frac{1}{3}\pi.OP.(3ab+b^2)$, et lorsque l'arc AN est convexe vers MU, il vient vol. OAP $= \pi.OP.a^2 - \frac{1}{3}\pi.OP.[a^2+a(a-b)+(a-b)^2] = \frac{1}{3}\pi.OP.(3ab-b^2)$; ce qui donne, pour les deux cas, vol. OAP $= \frac{1}{3}\pi.OP.(3ab \pm b_2)$. On a aussi, dans les deux cas, aire APN $=$ OAN $- \frac{1}{2}$OP.b, OP $= r - d$ et $b^2 = 2dr - d^2$. Avec ces valeurs et la formule (1), l'équation vol. OAN $=$ vol. APN $+$ vol. OAP se réduit à vol. OAN $=$ OAN.$2\pi a \pm \frac{2}{3}\pi r^2 d$. On aurait de même vol. OBN $=$ OBN. $2\pi a \pm \frac{2}{3}\pi r^2 d'$; donc vol. OASB $=$ OASB.$2\pi a \pm \frac{2}{3}\pi r^2 h$. Observant que, si l'axe passait par le centre O, le volume décrit par OASB, dans la figure 6, serait un secteur sphérique qui, à cause de $a = o$, aurait pour mesure $\frac{2}{3}\pi r^2 h$, on en conclura que *le volume décrit par la révolution de tout secteur circulaire, autour d'un axe extérieur, dans le même plan, a pour mesure l'aire de ce secteur multipliée par la circonférence que décrit son centre plus ou moins le secteur sphérique que décrirait le même secteur circulaire autour du diamètre parallèle à l'axe;* (plus *si l'arc de ce secteur est concave et* moins *s'il est convexe vers l'axe en question.*)

Corollaire II. Il est aisé de voir que l'aire du trapèze ABQP $= \frac{1}{2}(b+c)h$ et que, suivant que l'arc AB est concave ou convexe vers l'axe MU, le volume décrit par ce trapèze, autour du même axe, est vol. ABQP $= \frac{1}{3}\pi h[3a(b+c) \pm (b^2+c^2+bc)]$. Or, soit S le segment circulaire ASB et m la corde AB; il est clair qu'on aura d'abord le demi-segment QBAP $=$ S $+ \frac{1}{2}(b+c)h$, et qu'ensuite le triangle rectangle AIB donnera $(c-b)^2 = m^2 - h_2$. Ainsi avec ces valeurs, celle du volume décrit par ABQB et la formule (2), l'équation vol. S $=$ vol. QBSAP $-$ vol. ABQP, deviendra, toute réduction faite,

$$\text{vol. S} = \text{S}.2\pi a \pm \frac{1}{6}\pi m^2 h, \text{ ou vol. S} = \text{S}.2\pi a \pm \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Cette formule fait voir que *le volume décrit par la révolution de tout segment circulaire autour d'un axe extérieur, dans le même plan, a pour mesure l'aire de ce segment multipliée par la circonférence que décrit son centre, plus ou moins le demi-secteur sphérique que décrirait, autour du diamètre parallèle à l'axe, le secteur circulaire dont le segment proposé fait partie.* (Plus *si l'arc du segment est concave, et* moins *s'il est convexe vers l'axe dont il s'agit, le segment et le centre étant d'ailleurs d'un même côté de cet axe.*) Ils ne pourraient être de part et d'autre que quand l'arc est concave; et alors on aurait vol. $S = \frac{1}{3}\pi r^2 h - S.2\pi a$.

Corollaire III. Supposons que le segment S devienne égal au demi-cercle $\frac{1}{2}\pi r^2$, ayant son diamètre parallèle à l'axe MU; supposons de plus que le demi-cercle dont l'arc est concave et le demi-cercle dont l'arc est convexe vers l'axe, aient le même centre; il est visible que les volumes décrits par ces demi-cercles, seront respectivement $\frac{1}{2}\pi r^2.2\pi a + \frac{1}{3}\pi r^3$ et $\frac{1}{2}\pi r^2.2\pi a - \frac{1}{3}\pi r^3$; la somme de ces volumes, c'est-à-dire, le volume de l'*anneau rond* engendré par le cercle entier, sera donc $\pi r^2.2\pi a$. Ainsi *le volume de l'anneau rond produit par la révolution du cercle autour d'un axe extérieur et dans le même plan, a pour mesure l'aire de ce cercle multipliée par le chemin que décrit son centre.*

Remarque. Le théorème suivant a beaucoup d'analogie avec ceux que nous venons d'établir. *Soit S' la surface décrite par un arc A autour d'un axe extérieur, dans le même plan; soit R le rayon de cet arc, C la projection de sa corde sur l'axe, et D la distance du centre au même axe;* 1° *si l'arc est convexe vers l'axe, on aura* $S' = A.2\pi D - C.2\pi R$; 2° *si l'arc est concave vers l'axe, il viendra* $S' = C.2\pi R \pm A.2\pi D$, *le signe* + *ayant lieu lorsque l'arc et le centre sont d'un même côté de l'axe, et le signe* — *quand ils sont de part et d'autre.*

Ce théorème fournit la mesure des aires de toute zone et de la surface sphérique : il en résulte aussi que *la surface* annulaire *engendrée par la circonférence du cercle tournant autour*

d'un axe extérieur, dans le même plan, a pour mesure cette circonférence multipliée par le chemin que décrit son centre.

Voici encore un théorème, que l'on peut démontrer par la méthode des premières puissances des nombres naturels : *Si une droite* d *et une figure plane quelconque F sont perpendiculaires à un même plan P, et qu'une autre droite, appuyée sur la première et sur le contour de F, se meuve de manière à être constamment parallèle au plan, le volume du* conoïde *résultant sera la moitié du produit de sa base F par sa hauteur* h, *en appelant* hauteur *la perpendiculaire menée du pied de la direction* d *sur le plan de la base F.*

Sur l'intensité du magnétisme à Bruxelles, Paris, Londres et Altona. (Extrait d'un mémoire lu le 5 décembre 1829, à l'Académie royale de Bruxelles, par A. QUETELET.)

L'intensité magnétique n'avait pas encore été déterminée à Bruxelles, du moins à ma connaissance, avant les observations qui ont été faites par M. *Sabine* et par moi, vers la fin de l'année dernière et dans le courant de cette année. Les observations de M. le capitaine *Sabine*, ont eu lieu le 5 novembre 1828, vers midi, dans le jardin de l'Observatoire, avec un appareil semblable à celui dont se sert M. *Hansteen*. Les résultats ont été publiés dans le tome V de la *Correspondance math.*, p. 226, en même temps que les résultats obtenus à Altona et à Londres, avec le même appareil. Mais les nombres devant être réduits à cause de l'inégalité de température à laquelle les expériences ont eu lieu, j'ai entrepris ce calcul, en faisant usage de la formule de *Hansteen*, dont M. le capitaine *Sabine* lui-même a fait usage dans les *Transactions philosophiques* pour 1828, en déterminant la différence d'intensité magnétique entre Paris et Londres. Voici cette formule : en supposant que *n*

oscillations, s'effectuent en t secondes par une température de t degrés de *Fahrenheit;* et en T' secondes par une température de t' secondes, on a :

$$T = T' [1 - 0{,}000165 (t' - t)].$$

En réduisant donc les résultats comme s'ils avaient été déterminés à une température de 44° de *Fahrenheit*, on obtient les nombres suivans :

	BRUXELLES.	LONDRES.	ALTONA.
Aiguille IV. . . .	349",39	352",84	351",98
— XI. . . .	309, 22	312, 28	311, 98
— X. . . .	342, 61	345, 40	344, 98

tels sont les temps employés par les aiguilles de M. *Sabine*, à faire 100 oscillations horizontales. Or, si l'on considère que les composantes horizontales de l'intensité sont en raison inverse des carrés de ces nombres, on a, en prenant pour unité la composante de l'intensité à Londres,

	BRUXELLES.	ALTONA.	PARIS.
	1,0198	1,0049	1,0732
	1,0199	1,0019	1,0723
	1,0163	1,0024	1,0726
Moyennes.	1,0187	1,0031	1,0727

On voit que les trois premières villes sont à peu près sous la même ligne isodynamique, comme l'indique la carte que M. *Hansteen* a insérée dans les *Astronomische nachrichten.* Les valeurs pour Paris sont extraites du Mémoire des *Transactions*, dont j'ai parlé plus haut; M. *Sabine* a trouvé plus exactement 1,0714 en faisant concourir six aiguilles à la détermination de cet élément.

En faisant usage des nombres que M. *Hansteen* donne dans sa carte des lignes isodynamiques, on obtient :

TEMPS DE 100 OSC.		INTENSITÉ HORIZONT. d'après *Hansteen.*	*Sabine.*
Altona	774″	1,0000	1,0000
Paris.	752″,2	1,0588	1,0681
Bruxelles.	. . . .	. . . .	1,0156
Londres. . . .	774″,5	0,9987	0,9969.

J'ai choisi la quantité relative à Altona pour terme de comparaison, parce que j'ai eu l'avantage de faire mes observations dans le jardin de M. le professeur *Schumacher*, au même lieu où les deux habiles physiciens dont je viens de parler, ont fait les leurs. Voici mes résultats obtenus à Altona avec deux aiguilles différentes, ainsi que ceux que j'ai obtenus à Bruxelles,

	BRUXELLES.	ALTONA.
Aiguille. I.	392″,13	396″,75
— II	374″,66	379″,39

Les réductions pour la température ont été faites comme plus haut. Si l'on calcule la partie horizontale de l'intensité, celle pour Altona servant d'unité, il vient 1,02370 pour la première aiguille et 1,02374 pour la seconde.

Mes observations, ainsi que celles du capitaine *Sabine*, s'accordent donc à donner la partie horizontale de l'intensité magnétique, un peu plus grande à Bruxelles, qu'à Londres et à Altona.

Pour avoir l'intensité totale, il faudrait diviser les quantités précédentes par les cosinus respectifs des angles d'inclinaison. On aurait de cette manière, en adoptant les valeurs des inclinaisons données par M. *Sabine*, pour Paris et Londres, et en prenant celle que j'ai trouvée pour Bruxelles, (l'inclinaison pour Altona m'est inconnue.) :

	INT. HORIZ.	INCLIN.	INTENSITÉ.
Paris.	1,0681	67°58′	2,8471
Londres. . . .	0,9969	69.45′	2,8803
Bruxelles . . .	1,0156	68 56′,5	2,8265
—	1,0237	»	2,8490

En adoptant comme l'a fait M. *Hansteen*, dans les *Astronomische nachrichten*, 1,3482 pour l'intensité totale à Paris, on obtient :

Paris.	1,3482	
Londres. . . .	1,3639	
Bruxelles . . .	1,3383	d'après M. *Sabine*.
— . . .	1,3491	d'après mes observ.

Ainsi, d'après mes observations, l'intensité magnétique à Bruxelles, est plus grande qu'à Paris et moindre qu'à Londres. La valeur obtenue par M. le capitaine *Sabine* serait moindre que dans ces deux villes; ce qui paraît peu probable. J'ai des raisons de croire d'une autre part, que l'inclinaison que j'ai déterminée avec beaucoup de soins et à plusieurs reprises avec un excellent instrument de *Troughton*, ne doit guères différer de l'inclinaison véritable.

Sur la production des bandes colorées par des miroirs plans. (Addition à l'article de la p. 394, du t. V), par A. Quetelet.

J'ai parlé dans le volume précédent de la *Correspondance*, d'une manière simple de produire des bandes colorées en se plaçant à quelques pas devant un miroir plan sur lequel on a fait passer une légère vapeur, et en observant l'image d'une chandelle qu'on tient à peu de distance de l'œil. Mais en faisant passer la vapeur de l'haleine sur le miroir, on a l'incon-

vénient de voir bientôt disparaître le phénomène. J'ai trouvé depuis, qu'on peut le rendre durable en employant, au lieu de la vapeur d'eau, une légère couche d'une substance grasse, d'huile ou de suif, par exemple, qu'on étend d'une manière bien égale. On peut alors observer les bandes colorées à loisir. On trouvera qu'elles se prononcent surtout nettement, si l'on a eu la précaution d'appuyer légèrement un linge sur les différentes parties de la couche très-mince de substance grasse, afin de faire disparaître les petites stries parallèles et régulières que l'on forme en étendant cette substance sur le miroir.

De l'action qu'exerce sur une aiguille aimantée, un barreau aimanté tournant dans un plan et parallèlement au-dessous de l'aiguille, par M. Plateau, docteur en sciences.

Disposez un barreau aimanté de manière qu'il puisse tourner dans un plan horizontal autour d'un axe passant par son milieu, et placez au-dessus de ce barreau une aiguille aimantée, soutenue sur un pivot ou suspendue à un fil de cocon. Si vous donnez au barreau un mouvement de rotation d'une lenteur suffisante, l'aiguille, comme on doit s'y attendre, le suivra et tournera avec lui; mais si vous augmentez jusqu'à un certain point la vitesse du barreau, l'aiguille cessera de tourner et ne fera plus que d'écrire de grandes oscillations: en augmentant encore la vitesse du barreau, ces oscillations diminueront d'amplitude, et enfin, pour un certain degré de vitesse, elles cesseront tout-à-fait, et l'aiguille demeurera immobile et dirigée dans le méridien magnétique, absolument comme si le barreau n'existait pas.

Ce fait ne tendrait-il pas à prouver que la transmission de l'action magnétique n'est pas instantanée, et ne pourrait-on pas s'en servir pour mesurer le retard qu'elle éprouve? (1)

---

(1) Il nous semble que M. *Plateau* a fort bien senti le parti qu'on pour-

Consommations de Londres et de Paris, comparées à celle de Bruxelles.

M. *Moreau de Jonnès* a publié récemment dans la *Revue de Paris* (1), quelques recherches statistiques sur les pâturages de l'Europe, dans lesquelles on trouve les valeurs suivantes pour les consommations de Londres :

		POIDS.	DONNANT NET	LIVRES.
110000	bœufs. . .	800 liv.	554	60940000
250000	veaux. . .	140	105	26250000
770000	moutons. .	80	76	58520000
250000	agneaux. .	50	48	12000000
200000	porcs. . .	175	160	32000000
1580000	animaux.	Quantité de viande totale		189710000

La population de Londres étant de 1,225,000 individus, c'est pour chacun d'eux 155 livres de viande, réduites en livres françaises à 143. Cette énorme consommation individuelle, la plus grande qu'il y ait dans le monde entier, en nourriture animale, se forme d'un tiers en bœuf, de près d'un autre tiers en mouton, d'un sixième en porc, d'un septième en veau, et d'un quinzième en agneau.

La consommation annuelle de Paris, d'après M. *De Chabrol*,

---

rait tirer de cette expérience très-simple. Nous l'engageons à vérifier si les résultats qu'il obtiendrait par cette voie, en estimant le retard qu'éprouve la transmission de l'action magnétique, s'accorderaient avec ceux qu'ont trouvés en Angleterre, MM. *Herschel* et *Babbage*, en suivant une autre marche. Nous avons extrait la note précédente d'une lettre de M. *Plateau*, qui sera insérée dans le numéro suivant. A. Q.

(1) M. *Moreau de Jonnès*, dans un tableau des pâturages, qu'il donne pour l'Europe, indique successivement les *Pays-Bas* pour 680 lieues carrées, la *Belgique* pour 338, la *Hollande* pour 242. Nous ne comprenons pas bien ce que l'auteur a voulu désigner par les mots Pays-Bas, Belgique, Hollande, surtout si nous avons égard aux nombres qu'il donne; nous aurions désiré qu'il eût indiqué ses sources.

est estimée ainsi qu'il suit :

		POIDS.	DONNANT NET	LIVRES.
85725	bœufs. . .	600	450	38576250
74385	veaux. . .	120	90	6694650
337697	moutons. .	38	36	10806304
88640	porcs. . .	175	160	1418240
586447	animaux.		Donnant	57495444
			Viande à la main et issues	4432000
			Quantité de viande totale	61927444

La population moyenne ayant été de 715000 habitans, c'est pour chacun d'eux 86 livres de viande, pour sa consommation annuelle, savoir : les deux tiers en bœuf, un sixième en mouton, un neuvième en veau et un quarantième en porc.

D'après les nombres qui ont été indiqués pour Bruxelles, dans le volume précédent de la *Correspondance*, et qui expriment assez bien les moyennes des dernières années, du moins quant à la consommation des viandes, on avait compté en 1828 :

		POIDS (1).	DONNANT NET	LIVRES.
9190	bœufs	600	554	5091260
17172	veaux	140	105	1803060
26933	moutons et agneaux	50	48	1292784
3362	porcs	175	160	567920
56657	animaux.		Donnant	8755024
			Viande à la main	133000
			Quantité de viande totale	8888024

La population de Braxelles peut être évaluée à 100,000 habitans, c'est pour chacun d'eux 89 livres de viande environ, et par conséquent à peu près 3 livres de plus que pour un ha-

(1) Le poids a été estimé d'après le prix des animaux.

bitant de Paris. Cette consommation se compose : des trois cinquièmes en bœuf, d'un cinquième en veau, d'un sixième en mouton, d'un seizième en porc.

La consommation en bœuf est très-grande comparativement à celle des autres viandes, cependant dans l'espace de 10 ans, elle a diminué d'un tiers, tandis que la consommation des porcs et des moutons a augmenté d'un tiers, et que celle des veaux a doublé.

Quant aux boissons, un individu consomme annuellement à Bruxelles 330 litres de bière, environ 9 litres de vin et un peu moins de liqueurs fortes. Cependant la consommation pour la bière a diminué beaucoup en 1828.

Académie Royale de Bruxelles.

Séance du 5 décembre. — Après la lecture du procès verbal de la séance précédente, M. *Dewez* annonce que S. M. le Roi a confirmé la nomination de M. *Sauveur* fils, comme membre ordinaire. M. *De Reiffenberg* présente un monument typographique curieux, sur lequel il se propose de faire un mémoire. C'est le pardon accordé par Maximilien, roi des Romains, aux Brugeois, en 1488, et une bulle en placard par laquelle le pape Innocent excommunie les Flamands infidèles au Roi. Il y joint une lettre d'indulgence sur vélin de l'an 1500, et qui n'était pas connue. — M. *Quetelet* fait connaître le résultat de ses expériences et de celles du capitaine *Sabine*, pour déterminer la différence d'intensité magnétique entre Bruxelles et les villes de Paris, Londres et Altona. (*Voy.* pag. 66). — M. *Pagani* lit un extrait d'un mémoire intitulé : *Considérations sur les principes qui servent de fondement à la théorie mathématique de l'équilibre et du mouvement vibratoire des corps solides élastiques*. (Il sera inséré dans le prochain numéro). — L'Académie reçoit aussi communi-

cation d'un mémoire de M. *Marchal*, sur les sceaux des archives de l'ancien château de Namur. — M. *Blume* fait hommage d'un exemplaire de la partie de sa Fore de Java, intitulée : *Magnoliaceæ*. — Il est également fait hommage de divers ouvrages de MM. *Hachette*, *Van Mons*, etc. — Dans la même séance MM. *Robert Brown*, *Encke* et *Schumacher* ont été nommés correspondans; l'Académie a résolu de plus que le nombre des correspondans serait désormais limité et fixé à 60, savoir : 20 pour les sciences physiques et mathématiques; 20 pour les sciences naturelles, et 20 pour les lettres.

Correspondance et Annonces scientifiques.

— Nous avons donné dans le 5ᵉ vol. de la *Correspondance*, un extrait du *projet de loi pour l'établissement d'un nouvel observatoire à Génève*. Nous recevons aujourd'hui le *rapport de la commission du conseil représentatif*, sur le même projet. Ce rapport a été rédigé par M. le professeur *Gautier*. Nous en donnerons quelques extraits, qui intéresseront sans doute nos lecteurs. « La commission a résolu par l'affirmative la question de la convenance générale du projet, convenance contre laquelle, après le rapport du conseil d'état, il n'a pas même été fait une seule objection dans le tour de préconsultation ouvert dans ce souverain conseil.... Il s'agit dans le cas actuel 1° de procurer aux astronomes les moyens de faire, le plus commodément et complétement que possible, toutes les observations les plus importantes ; 2° de fournir un local convenable à des démonstrations et leçons d'astronomie ; 3° de faciliter, soit pour l'horlogerie, soit pour la météorologie et la physique, les essais et observations qui lient ces branches à l'astronomie...... En examinant attentivement tous les articles du devis, la sous-commission en a trouvé un qui étoit susceptible de réduction. C'est celui de la seconde coupe méridienne, dont la dépense se

trouve comprise tout entière dans le devis, ainsi que celle des piliers, quoiqu'il ne soit point proposé d'utiliser cette ouverture en la destinant à un instrument méridien. L'usage constamment suivi dans les observatoires modernes, de pratiquer dans le bâtiment plusieurs coupures dans la direction du méridien, pour les observations qui se font dans ce plan et qui seront toujours les plus importantes, rend convenable de prévoir dans une construction nouvelle, le cas où l'on aurait besoin d'une seconde ouverture semblable à celle de la lunette méridienne et faisant symétrie avec elle. Il y a donc un avantage réel à diriger la batisse de manière à pouvoir une fois pratiquer cette ouverture sans difficulté, et y établir un nouvel instrument dont les découvertes postérieures feraient sentir la nécessité. Telle a été l'opinion bien prononcée de MM. *Arago* et *Nicollet*, lorsqu'ils ont été consultés là-dessus sur les lieux mêmes... Le troisième et le plus considérable des changemens proposés, est la substitution dans la salle principale d'un parquet en dalles de pierre, porté sur de petits murs de refend, au simple pavé en briques communes, reposant immédiatement sur le sol, qui était marqué dans le devis. Outre que cette dernière espèce de pavé serait bien peu en harmonie avec un édifice soigné d'ailleurs, il pourrait avoir un inconvénient réel, sous le rapport de l'humidité, dont on doit se garantir autant que possible dans un observatoire, et dont notre expérience ne nous a que trop appris à redouter les pernicieux effets. » La commission finit par adopter le projet de loi d'une dépense de 65000 fl. destinés à la construction du nouvel observatoire, nonobstant 55000 florins pour l'acquisition d'instrumens.

— On lisait dernièrement dans un de nos journaux les plus répandus, une *lettre communiquée* sur les embellissemens de Bruxelles, dont nous extrayons le passage suivant : « Je n'en dirais pas autant si l'on ne voyait pas de l'argent dépensé pour des objets de pur luxe, comme l'observatoire par exemple. Songez plutôt à notre monde, braves municipaux, à notre terre d'ici-bas. Je vous demande de quelle utilité sera un observatoire à une si petite distance de Paris? Je connais la science de

l'astronomie, et je vous dis qu'il ne reste rien à faire que quelques calculs sur quelques corps célestes, qui ont de l'intérêt seulement pour quelques savans professeurs. » Cet amateur a jugé convenable de garder l'anonyme; mais nous sommes assez disposés à croire que c'est le même qui annonçait il y a deux ans dans un autre journal, qu'*on venait d'observer une comète qui paraissait large comme une assiette, et dont la queue avoit plusieurs pouces de longueur*. De pareilles phrases sont caractéristiques; et quand on les émet avec tant d'assurance et qu'on ne trouve point de contradicteur, elles méritent de figurer dans la statistique d'un pays. Heureusement l'observatoire qu'on termine en ce moment, prouve assez que notre gouvernement et que nos *braves municipaux* pensent à peu près comme le sénat de Genève, et je dirai comme celui de Hambourg, qui vient de bâtir un grand observatoire, quoiqu'il en existe un très-célèbre aux portes de cette ville, à Altona. Edimbourg et Cambridge, qui viennent de faire construire également de nouveaux observatoires, Berlin qui se propose de renouveler le sien; M. South qui en a fait construire un à ses frais près de Londres et à quelques milles de Greenwich, en savent sans doute bien moins que notre amateur, et ont la folie de croire qu'*il reste encore quelque chose à faire* en astronomie.

— Nous avons reçu le prospectus d'un ouvrage nouveau pour lequel on souscrit à Mons chez *Hoyois-Derely*. Cet ouvrage est intitulé : *Cours de Géométrie élémentaire, descriptive et du compas, de trigonométrie rectiligne et sphérique, des transversales et de polygonométrie avec leurs applications à l'industrie, aux beaux arts, à l'art militaire, à la marine, etc.*; par M. V.-J. *Van Der Elst*. Il formera un gros volume in-8°, en caractère petit texte; et coûtera 4 florins aux souscripteurs. Nous aurons soin d'en rendre compte dès qu'il aura paru.

— Les sciences viennent de perdre M. *Bangma*, membre de l'institut des Pays-Bas, et auteur de plusieurs écrits estimés sur les mathématiques.

— Nous apprenons de Berlin que les dernières nouvelles de M. *De Humbold* sont datées d'Astracan, et que cet illustre savant étoit attendu vers le milieu de décembre.

— M. *De Haddat* vient d'observer que, lorsqu'au moyen d'un barreau aimanté, on trace des figures sur des lames de tôle d'acier, à peu près comme quand on promène le barreau dans le procédé ordinaire de l'aimantation; et qu'ensuite on répand sur les lames de la limaille de fer très-fine, cette limaille vient s'attacher sur les traces invisibles qu'a laissées l'aimant; les caractères ne doivent pas avoir plus de 4 à 5 centimètres de hauteur. Ces figures rappellent celles de *Lichtenberg*, que l'on trace sur l'électrophore.

— Nous avons reçu trois dissertations nouvelles qui ont été défendues dans nos Universités, pour l'obtention du grade de docteur en sciences : l'une à Liége, par M. *Brasseur*, et les deux autres à Gand, par MM. *Leschevain* et *Lagrange*, que nos lecteurs connaissent déjà par différentes solutions de problèmes insérées dans la *Correspondance*.

La première dissertation renferme un exposé clair et succinct des travaux des géomètres sur la séparation des fonctions algébriques entières en facteurs réels du premier ou du second degré. Le même sujet a aussi donné lieu à une dissertation intéressante de M. *Verhulst*. M. *Lagrange* a traité de la théorie des aires et du plan invariable, et a enrichi son travail de plusieurs observations utiles M. *Leschevain* a fait également preuve du succès avec lequel il s'est occupé des études mathématiques, en discutant le principe de *Dalembert*. La manière dont il déduit les oscillations du pendule des mouvemens de deux points pesans agissant aux extrémités d'un lévier, mérite d'être remarquée.

Nous désirons vivement que ces jeunes savans continuent à suivre une carrière dans laquelle ils ont débuté d'une manière si avantageuse; nous avons appris avec plaisir que déjà M. *Lagrange* était attaché au collége de Gand, pour l'enseignement des mathématiques. Le voyage qu'il fait en ce moment à Paris, ne pourra que lui être utile pour ses études; il y rencontrera sans doute avec plaisir son compatriote M. *Brasseur*, à qui le gouvernement vient d'accorder un subside pour séjourner quelque temps dans la même ville. L'ardeur avec

laquelle on commence à s'occuper chez nous des sciences mathématiques, ne manquera pas d'avoir la plus heureuse influence sur la direction que prend l'étude des sciences d'observation.

— La première partie du tome II des *Élemens de physique expérimentale et de météorologie*, par M. *Pouillet*, est venue satisfaire en partie l'impatience des nombreux souscripteurs que compte cette publication. Elle comprend ce qui concerne les actions moléculaires, l'acoustique, ainsi que la catoptrique, la dioptrique, la décomposition de la lumière, les raies du spectre, l'achromatisme et la construction des instrumens d'optique. M. *Pouillet* a répandu sur la composition de son ouvrage, l'agrément et l'intérêt qui font suivre avec tant d'avidité les leçons qu'il donne à la faculté des sciences de Paris.

— L'Académie Royale de Bruxelles a fait paraître le Ve volume de ses *Nouveaux Mémoires* (in-4°, chez M. *Hayez*, à Bruxelles, 1829). On trouve dans ce volume, les écrits suivans, pour la partie des sciences : 1° *Démonstration et développement des principes fondamentaux de la théorie mathématique des caustiques secondaires*, par M. Quetelet; 2° *Mémoire sur le développement des fonctions en séries, dont les termes dérivent de la même fonction continue, en y faisant varier une constante ou paramètre*, par M. Pagani. Il s'agit de déterminer tous les coefficiens des termes d'une série qui dérive d'une même fonction, d'après une certaine loi, de manière que la somme de tous ces termes soit égale à la valeur d'une fonction arbitraire donnée, pour toutes les valeurs de la variable, comprise entre les deux limites connues. On suppose que la fontion génératrice de la série, ainsi que la fonction arbitraire, ne peuvent devenir infinies entre les deux limites de la variable, et qu'aux limites mêmes les valeurs de la fonction arbitraire dépendent de celles de la fonction génératrice; 3° *Observations sur les hyménoptères d'Europe, de la famille des Fouisseurs*, par M. Van der Linden; 4° *Essai sur les insectes de Java et des îles voisines*, par le même; 5° *Recherches statistiques sur le royaume des Pays-Bas*, par A. Quetelet; 6° *Re-*

cherches de géométrie pure, sur les lignes et les surfaces du second degré, comprenant : les principes des transformations polaires des coniques et des cônes du second degré ; les propriétés générales des surfaces du second degré de révolution ; quelques propriétés générales des cônes du second degré, et une construction des directions des lignes de courbure, des surfaces du second degré, par M. *Chasles*. Ce volume contient encore le Journal des séances et plusieurs mémoires historiques, par MM. le baron *De Reiffenberg* et *Dewez*, ainsi que des observations météorologiques, par M. *Kickx*. L'Académie a pris des arrangemens qui permettent actuellement de séparer les mémoires ; le prix des volumes se trouve aussi réduit de plus de moitié, à partir du tom. IVe.

— Nous venons de recevoir un nouveau volume des *Recherches statistiques sur la ville de Paris*, pour 1829. Cet important recueil continue à présenter la série des documens statistiques relatifs à la capitale de la France, et comprend plusieurs recherches nouvelles qui n'avaient pas encore été comprises dans les publications précédentes. On y trouve entre autres les réponses à deux questions sur la durée des générations, qui intéressent à la fois l'histoire naturelle de l'homme et la chronologie. Ainsi, pendant le 18e siècle, l'âge moyen des époux dans la ville de Paris, au moment d'un premier mariage, a été de 29 ans, 68 pour les hommes, et 24ans, 72 pour les femmes ; et l'on peut parier 20000 contre un, que l'erreur à craindre n'est pas d'un an. Les âges moyens, au moment de la naissance d'un fils, ont été 33ans, 31 pour les pères, et 28ans, 17 pour les mères, et l'on peut encore parier 20000 contre un, que l'erreur à craindre n'excède pas 16 mois. Il est remarquable que l'âge auquel les hommes se marient, et auquel les femmes mettent au monde leur premier fils, corresponde à la durée de la vie moyenne qu'on a calculée être de 28 ans, 9 mois, pour la France. Ce recueil est précédé d'un second mémoire très-intéressant sur les résultats moyens et sur les erreurs des mesures.

— M. *Chasles* nous a adressé une lettre relative à un mé-

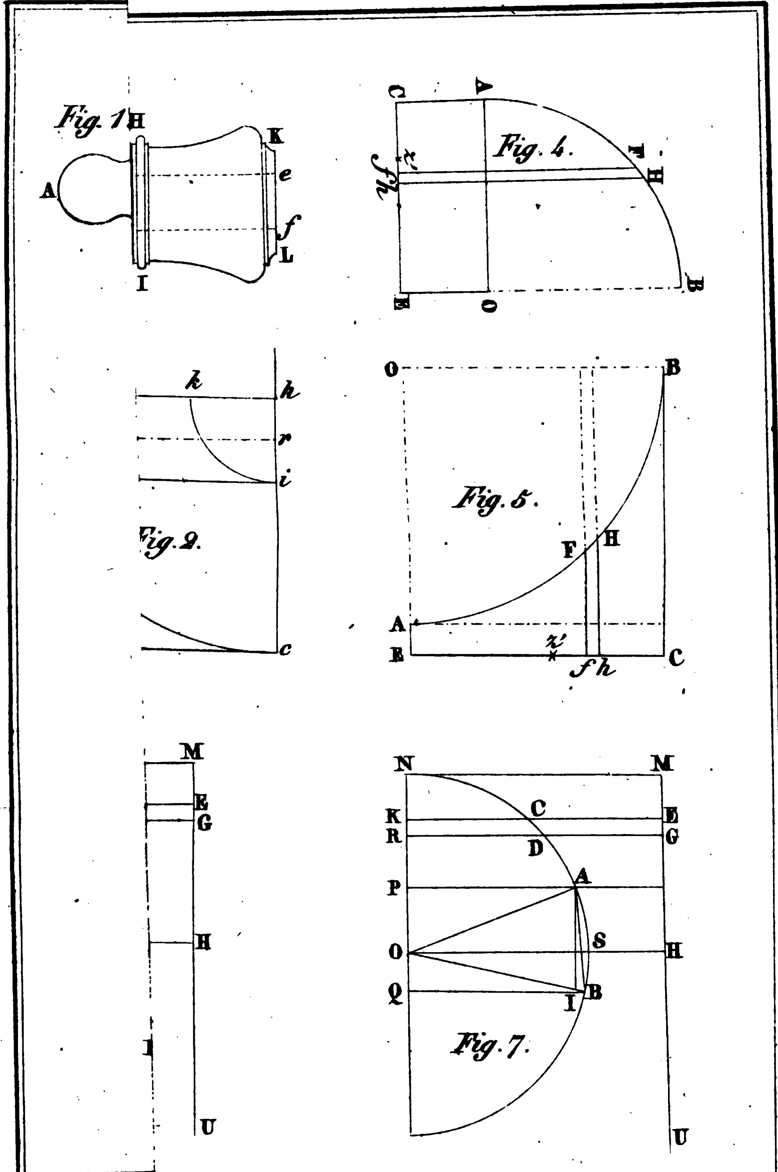
moire *sur un nouveau système de coordonnées*, inséré par M. *Plücker*, dans le Journal de M. *Crelle*. Nous la donnerons dans le prochain numéro.

— On annonce comme devant paraître sous peu chez *Firmin Didot*, un nouvel ouvrage de M. le baron *Fourier*, intitulé : *Analise des équations déterminées*, en 2 vol. in-4°.

QUESTIONS.

On demande les réponses aux questions qui terminent la lettre de M. *Timmerhans* ainsi que l'article de M. *Reiss*. (Voyez pages 47 et 61 de ce vol.)




Fig. 1
H
K
A
e
f
L
I
Fig. 4.
C
A
z'
f
h
F
H
E
O
B
k
h
r
i
Fig. 2.
c
O
B
Fig. 5.
F
H
A
E
z'
f h
C
M
E
G
H
U
N
M
K
C
E
R
G
D
P
A
S
O
H
Q
I
B
Fig. 7.
U

Lettre de M. Chasles *au rédacteur, au sujet d'un Mémoire de* M. Plucker, *inséré dans le Journal de* M. Crelle.

Je reçois aujourd'hui le 6e no de la *Correspondance*; j'y vois l'annonce d'un écrit de M. *Plücker*, sur un nouveau système de coordonnées, comme faisant partie de la première livraison du tom. V du *Journal de M. Crelle*.

M'étant aussi occupé d'un nouveau système de coordonnées propre à un grand nombre de questions auxquelles les systèmes usités ne s'appliquent pas, je m'empresse de vous en faire connaître très-rapidement le principe, pour donner date à mon travail dans le cas où je me serais rencontré avec M. *Plücker*.

Vous vous rappellerez peut-être, Monsieur, que dans ma lettre du 11 juin dernier, j'avais l'honneur de vous dire que je terminerais un travail par un essai sur une méthode propre à la démonstration directe d'un grand nombre de propositions qu'on déduit aujourd'hui d'autres propositions connues, par divers modes de transformation.

J'ai eu occasion aussi, d'annoncer cet écrit à M. *Hachette*, dans une lettre du 5 juillet : « Je me suis occupé, disais-je, » d'un nouveau mode d'application de l'algèbre à la géométrie, » qui se prête à la démonstration de propriétés toutes nou- » velles des figures, qu'il me paraîtrait difficile de traiter par » les systèmes de coordonnnées en usage. Voici quelques-unes » de ces propriétés, etc. ».

Voici, en peu de mots, mon système de coordonnées. J'ai pour but de représenter chaque surface par une équation qui donne tous ses plans tangens, de même que dans le système usité, on représente chaque surface par une équation qui donne tous ses points.

Pour cela, par trois points fixes A, B, C, je mène trois axes parallèles entre eux. Un plan quelconque rencontre ces axes

en trois points dont les distances aux points A, B, C respectivement, sont les coordonnées x, y, z du plan.

Une équation $F(x, y, z) = o$ entre ces coordonnées donne lieu à une infinité de plans, et représente, par conséquent, la surface enveloppe de tous ces plans.

Si cette équation est du premier degré, elle représente un point.

Pour faire une application de ce système de coordonnées, je me propose de démontrer le théorème suivant :

Étant donnés une surface géométrique, un plan, et une transversale parallèle à ce plan,

Par une droite prise arbitrairement dans le plan, on mène les plans tangens à la surface, et un dernier plan qui passe par le centre des moyennes distances des points où tous les plans tangens rencontrent la transversale;

Ce plan passera par un point fixe, quelle que soit dans le plan donné la droite par laquelle on a mené les plans tangens à la surface.

Rapportons la surface aux trois axes coordonnés parallèles entre eux, Ax, By et Cz, dont le premier soit la transversale donnée, et dont les deux autres soient situés dans le plan donné.

Soit $F(x, y, z) = o$ l'équation de la surface. On peut la mettre sous la forme $F(x' + x - x', y' + y - y', z' + z - z') = o$, ou :

$$
\begin{aligned}
F(x', y', z') &+ \frac{dF}{dx'}(x - x') + \frac{d^2F}{dx'^2}\,\frac{(x - x')^2}{2} + \text{etc.} = o. \\
&+ \frac{dF}{dy'}(y - y') + \text{etc.} \\
&+ \frac{dF}{dz'}(z - z') + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Soient y' et z' les coordonnées de la droite par laquelle on mène les plans tangens à la surface, en faisant $y = y'$ et $z = z'$ dans l'équation de la surface, on aura une équation en x, qui donnera les distances du point A aux points où les plans tan

gens rencontrent l'axe Ax. Cette équation est

$$F(x', y', z') + \frac{dF}{dx'}(x - x') + \frac{d^2F}{dx'^2}\frac{(x-x')^2}{2} + \text{etc.} = o.$$

x' est arbitraire; faisons $x' = o$, il vient

$$F(o, y', z') + \left(\frac{dF}{dx'}\right)_o x + \left(\frac{d^2F}{dx'^2}\right)_o \frac{x^2}{2} + \text{etc.} = o.$$

La somme des racines de cette équation, c'est-à-dire la somme des distances du point A aux points où les plans tangens rencontrent l'axe des x est

$$-m\left(\frac{d^{m-1}F}{dx'^{m-1}}\right)_o : \frac{d^mF}{dx'^m}.$$

(m étant le nombre des plans tangens)

L'ordonnée du centre des moyennes distances de ces points, est donc :

$$x = -\left(\frac{d^{m-1}F}{dx'^{m-1}}\right)_o : \left(\frac{d^mF}{dx'^m}\right)_o.$$

Les coordonnées du plan mené par ce point et par la droite par laquelle on a mené les plans tangens, sont

$$x = -\left(\frac{d^{m-1}F}{dx'^{m-1}}\right)_o : \left(\frac{d^mF}{dx'^m}\right)_o, \; y = y' \quad \text{et} \quad z = z'.$$

En éliminant y' et z' entre ces trois équations, nous aurons l'équation de la surface enveloppe de ce plan; elle est

$$\left(\frac{d^mF}{dx'^m}\right)_o x + \left(\frac{d^{m-1}F}{dx'^{m-1}}\right)_o = o.$$

Or, $\frac{d^mF}{dx'^m}$ ne renferme ni y' ni z', parce que l'équation de la surface proposée est supposée du degré m; $\frac{d^{m-1}F}{dx'^{m-1}}$ ne renferme y' et z' qu'au premier degré, par la même raison; l'équation à laquelle nous venons de parvenir, est donc du premier

degré; et par conséquent, elle représente un point. Ainsi le théorème est démontré.

Si on suppose que le plan donné soit à l'infini, le théorème prendra un nouvel énoncé d'où l'on conclura aisément cette propriété générale des surfaces géométriques : *Si on conçoit tous les plans tangens à une surface géométrique, parallèles à un plan donné, le centre des moyennes distances de leurs points de contact sera un point unique, quelle que soit la direction commune des plans tangens.*

Je donne les formules pour passer d'un système de coordonnées à un autre, et je généralise le système en question, en supposant que les trois axes que j'ai pris parallèles entre eux passent par un même point.

J'allais oublier de faire mention d'un autre système de coordonnées, tout différent de celui dont je viens de parler, mais qui n'est qu'une généralisation du système en usage. Les droites qui projettent un point sur les trois plans coordonnés, au lieu d'être parallèles aux trois axes coordonnés, passent respectivement par trois points fixes pris sur ces axes.

Ce mode de coordonnées peut suppléer dans une foule de questions à l'emploi des principes de la perspective.

Soient Ox, Oy, Oz les trois axes coordonnés, et A, B, C les trois points fixes pris sur eux. Pour avoir les coordonnées d'un point m de l'espace, on mènera par ce point trois plans passant respectivement par les trois côtés du triangle ABC; ces plans rencontreront les trois axes coordonnés en trois points a, b, c; en désignant par les variables x, y, z les rapports $\frac{Oa}{Aa}$, $\frac{Ob}{Bb}$, $\frac{Oc}{Cc}$, on prendra ces trois variables pour les coordonnées du point m.

S'il vous semble, Monsieur, que l'un ou l'autre de ces deux nouveaux systèmes de coordonnées ait quelque rapport avec celui de M. *Plücker* (ce que je ne puis vérifier moi-même, n'ayant pas le Journal allemand où il se trouve), veuillez avoir la bonté d'insérer cette lettre dans la *Correspondance*.

Chartres, le 10 décembre 1829.

Note supplémentaire à la lettre précédente.

Pour donner un exemple de l'usage de ce système de coordonnées, je vais démontrer le théorème suivant :

Si, ayant une surface du second degré, on mène par un point fixe trois droites dont chacune ait sa polaire comprise dans le plan des deux autres, la somme des carrés des distances de ce point aux trois points où ces droites perceront la surface, divisés respectivement par les carrés des distances de ces points à ceux où ces droites percent le plan polaire du point fixe, sera une quantité constante, quel que soit le système des trois droites.

Si le point fixe est le centre de la surface, on voit sur-le-champ que les trois droites forment un système de diamètres conjugués, et le théorème indique que la somme des carrés de ces trois diamètres est constante.

Pour démontrer ce théorème général, je prends le point fixe pour origine des coordonnées, et le plan des trois points A, B, C pour plan polaire de ce point; on pourra toujours représenter la surface par une équation de la forme :

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 1.$$

Soient $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$, et $\alpha'', \beta'', \gamma''$ les coordonnées des points où les trois droites percent la surface; on aura les trois équations

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 1,$$
$$L\alpha'^2 + M\beta'^2 + N\gamma'^2 = 1,$$
$$L\alpha''^2 + M\beta''^2 + N\gamma''^2 = 1.$$

On trouve que les conditions pour que les trois droites satisfassent à la question, sont exprimées par les trois équations

$$L\alpha\alpha' + M\beta\beta' + N\gamma\gamma' = o,$$
$$L\alpha\alpha'' + M\beta\beta'' + N\gamma\gamma'' = o,$$
$$L\alpha'\alpha'' + M\beta'\beta'' + N\gamma'\gamma'' = o.$$

On sait que ces six équations donnent lieu à quinze autres, dont les six suivantes vont nous servir :

$$\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=\frac{1}{L},\qquad \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=o,$$

$$\beta^2+\beta'^2+\beta''^2=\frac{1}{M},\qquad \alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''=o,$$

$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=\frac{1}{N}.\qquad \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=o.$$

Je fais voir que si on représente par ρ, le rapport des distances du point (α, β, γ) à l'origine, et au point où la première droite rencontre le plan ABC, on a

$$\rho=\alpha+\beta+\gamma.$$

on aura pareillement, en donnant des significations semblables à ρ' et ρ'',

$$\rho'=\alpha'+\beta'+\gamma',$$
$$\rho''=\alpha''+\beta''+\gamma''.$$

Élevant ces trois équations au carré, et les ajoutant membre à membre, nous aurons, en vertu des six équations ci-dessus,

$$\rho^2+\rho'^2+\rho''^2=\frac{1}{L}+\frac{1}{M}+\frac{1}{N};$$

équation qui démontre le théorème énoncé.

Ainsi que je l'ai dit en commençant, ce théorème est une généralisation d'une propriété connue des diamètres conjugués. Mais il est remarquable qu'il s'applique aux paraboloïdes de même qu'aux surfaces du second degré qui ont un centre.

Si le point fixe était à l'infini, on conclurait de ce théorème, comme corollaire, celui-ci :

Si par trois points pris dans un plan diamétral d'une surface du second degré, de manière que le plan polaire de l'un passe

par les deux autres, on élève sur ce plan trois parallèles à son diamètre conjugué, la somme des valeurs inverses des carrés des cordes comprises dans la surface sur ces trois parallèles sera constante, quel que soit le système des trois points.

Ce théorème convient aux paraboloïdes, parce que tout plan parallèle à l'axe d'un paraboloïde, peut être considéré comme un plan diamétral.

Cette méthode peut conduire à la généralisation d'un grand nombre d'autres propriétés des diamètres conjugués des surfaces du second degré. Elle sert à démontrer des théorèmes très-généraux sur ces surfaces que je n'ai fait qu'énoncer dans les *Annales de mathématiques*, septembre et octobre 1828.

Chartres, le 25 décembre 1829.

Considérations sur les principes qui servent de fondement à la théorie mathématique de l'équilibre et du mouvement vibratoire des corps solides élastiques; par M. Pagani. (Extrait d'un mémoire lu le 5 décembre 1829, à l'Académie Royale des sciences.)

M. *Navier* a donné, le premier, les équations fondamentales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques. M. *Poisson* est parvenu ensuite aux mêmes équations dans un mémoire fort étendu, où l'on trouve plusieurs applications importantes des formules générales (1). Il s'est pourtant élevé une contestation entre ces deux illustres académiciens au sujet du principe qui leur a servi de base, et du mode que l'on a employé pour le traduire en langage algébrique.

Nous examinerons d'abord les principes et la marche adoptés

(1) Tom. VIII des mémoires de l'Institut de France.

par les deux savans géomètres, afin d'arriver, s'il est possible, à expliquer la contradiction apparente des hypothèses et la coïncidence remarquable des résultats.

Tous les physiciens sont d'accord qu'il faut regarder un corps solide comme un assemblage d'un certain nombre de molécules d'une petitesse extrême, dont la forme est inconnue; ces molécules sont séparées les unes des autres, et elles sont retenues dans leurs positions relatives par l'action simultanée de deux forces contraires agissant entre deux molécules quelconques. On admet, en outre, que ces forces décroissent rapidement et que leur intensité devient insensible, aussitôt que les molécules sont à une distance sensible les unes des autres.

Enfin, l'expérience a démontré que les molécules d'un corps solide élastique, dérangées tant soit peu de leur position d'équilibre par l'action instantanée d'une cause quelconque, reviennent toujours à leur position primitive, dès que l'action de la cause perturbatrice vient à cesser.

Voilà les faits; voyons maintenant par quelles suppositions on peut parvenir à traduire ces données en formules algébriques.

En examinant avec attention tout ce que M. *Navier* a écrit sur ce sujet (*), on reconnaît que ce géomètre suppose que l'action réciproque de deux molécules M et M', dont la distance est r dans l'état naturel du corps solide, peut s'exprimer $\Delta r.\mathrm{F}r$ après le dérangement qui aura changé la distance r en $r+\Delta r$; la fonction $\mathrm{F}r$ n'aura de valeurs sensibles que pour des valeurs insensibles de r, et l'action entre une molécule et l'autre sera une attraction ou une répulsion selon que la distance Δr sera positive ou négative. En partant de cette hypothèse qui n'est point incompatible ni avec la raison ni avec les faits dont nous

---

(*) Voy. *Mémoires de l'Institut de France*, tom. VII; les *Annales de Chimie et de Physique*, et le *Bulletin des Sciences*, publié sous la direction de M. *De Férussac*.

avons parlé plus haut, on parvient aux équations fondamentales à l'aide des principes généraux de la mécanique.

On ne saurait reprocher à cette théorie aucune inexactitude dans les calculs; mais on pourrait douter de la légitimité de l'hypothèse fondamentale, d'après laquelle l'action réciproque de deux molécules ne serait pas seulement une fonction de leur position relative après le dérangement, mais elle dépendrait, en outre, de la distance primitive entre les molécules.

M. *Poisson* suppose 1° que chaque molécule d'un corps solide élastique, dans l'*état naturel*, est en équilibre en vertu de l'action de toutes les autres molécules; 2° que l'action entre deux molécules M et M', dont la distance est r, peut être exprimée par Fr; cette fonction n'ayant des valeurs sensibles que pour des valeurs insensibles de r; 3° que cette action est une attraction ou une répulsion selon que la fonction fr aura une valeur positive ou négative. Ajoutons que M. *Poisson* est conduit à admettre enfin que la fonction fr doit être telle que, dans l'état naturel du corps, on ait $\Sigma r^3 fr = o$, en étendant la somme à toutes les molécules comprises dans la sphère d'activité de M. Je ne crois pas nécessaire de faire observer que M. *Poisson* fait usage d'une analise différente de celle de M. *Navier*, et des autres géomètres qui se sont occupés de soumettre au calcul algébrique les relations mathématiques provenant de l'action des forces moléculaires. Il s'agit ici du principe et non des moyens d'en calculer l'application.

Maintenant, pour concilier les deux hypothèses admises par MM. *Navier* et *Poisson*, et nous expliquer, par-là, la coïncidence de leurs résultats, imaginons un corps solide homogène dont les molécules sont en équilibre en vertu de leurs attractions et de leurs répulsions réciproques, en faisant abstraction de toute force qui proviendrait d'une cause extérieure au corps. On peut supposer raisonnablement que les molécules de ce corps sont douées d'une égale énergie, et qu'elles sont distribuées uniformément dans l'espace occupé par le corps; de

sorte qu'en dénotant par α la distance entre deux molécules voisines, et par i un nombre entier quelconque, la quantité $i\alpha$ représente la distance entre deux molécules quelconques. De plus, si on désigne, en général, par r la distance qui sépare deux molécules M, M', par φr l'attraction réciproque de M et de M', et par ψr leur répulsion; on pourra dire alors que M' attire M avec une force $fr = \varphi r - \psi r$, pourvu que cette attraction devienne une répulsion toutes les fois que la fonction fr aura une valeur négative. Supposons enfin que l'on ait

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi r = \Pi r \left[1 + \chi\left(\frac{r}{\alpha}\right) \right] \\ \psi r = \Pi r \left[1 - \chi\left(\frac{r}{\alpha}\right) \right]; \end{cases}$$

en dénotant par Πr une fonction dont la nature est de devenir insensible pour des valeurs sensibles de la variable, et par $\chi\left(\frac{r}{\alpha}\right)$ une fonction inconnue qui est toujours nulle pour des valeurs de r égales à α ou à un multiple de α, et qui a une valeur positive ou négative, selon que l'on suppose $r = i\alpha \pm \omega$, en dénotant par ω une très-petite valeur moindre que $\frac{\alpha}{2}$. Il est facile de s'assurer qu'il existe une infinité de pareilles fonctions dont la plus simple est sin. $\frac{2\pi r}{\alpha}$, où π désigne la longueur de la demi-circonférence dont le rayon est égal à l'unité.

Cela posé, il est évident 1° que, dans l'état naturel du corps solide élastique, la molécule M sera en équilibre, puisque la force $f.i\alpha$ avec laquelle cette molécule est attirée par une autre molécule quelconque M' est nulle; 2° que les distances réciproques des molécules étant changées, il y aura attraction ou répulsion entre deux molécules queleonques M et M',

selon que la distance primitive $i\alpha$ qui séparait ces molécules sera devenue plus grande ou moindre ; 3° qu'en nommant r la distance primitive des molécules M et M′, et $r+\Delta r$ leur distance après le changement de forme du corps élastique, l'attraction de M′ sur M sera exprimée par $\Delta r.\frac{d.fr}{dr}$, en négligeant les puissances supérieures de Δr, et en observant que $fr=o$ lorsque r exprime la distance entre deux molécules dans l'état naturel du corps ; 4° qu'enfin, l'attraction d'une molécule M′ sur la molécule M étant représentée, en général, par fr, on aura nécessairement $\Sigma r^3 fr=o$ dans l'état naturel du corps, puisque, dans cet état, l'on a $fr=o$.

Nous pouvons conclure de tout ce qui précède que les deux *théories* de MM. *Navier* et *Poisson* rentrent l'une dans l'autre, si l'on suppose que les équations (1) expriment la nature des actions réciproques entre deux molécules quelconques d'un corps solide élastique. On voit aussi que la fonction que M. *Navier* dénote par $f\rho$ est la même que la fonction prime dérivée de celle que M. *Poisson* a nommé fr. D'après cela il n'est pas étonnant que ces deux illustres géomètres soient parvenus aux mêmes formules fondamentales qui ont l'avantage, en outre, d'être parfaitement d'accord avec l'expérience dans tous les cas particuliers auxquels M. *Poisson* en a fait l'application. Mais ces équations fondamentales étant déduites d'une hypothèse probable et non exclusivement conforme aux faits, on pourrait douter s'il n'existe pas d'autres suppositions également probables et en harmonie avec les résultats de l'expérience, et qui auraient, en outre, l'avantage de conduire à des formules générales plus simples et plus symétriques que celles que l'on a trouvées au moyen des principes que nous venons d'analiser. C'est la solution de ce problème qui forme l'objet du mémoire présenté à l'Académie.

Mémoire de géométrie pure, sur les systèmes de forces, et les systèmes d'aires planes; et sur les polygones, les polyèdres, et les centres des moyennes distances; par M. Chasles, ancien élève de l'École Polytechnique.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES SYSTÈMES DE FORCES, ET SUR LES SYSTÈMES D'AIRES PLANES.

I.

(1) Quand plusieurs forces sollicitent un corps solide libre, on peut les remplacer, d'une infinité de manières, par d'autres forces; on dit que le système de ces nouvelles forces est *équivalent* au système des forces proposées. C'est là ce que nous entendrons par systèmes de forces *équivalens*, sans avoir besoin de répéter que les forces sont supposées appliquées à un corps solide *libre;* et quand nous parlerons de deux systèmes de forces, sans dire qu'ils sont équivalens, ils seront tout-à-fait arbitraires l'un à l'égard de l'autre.

(2) Théorème I. *Quand on a deux systèmes de forces, si on multiplie chaque force du premier système par chaque force du second système, et par le cosinus de l'angle de ces deux forces, la somme de tous ces produits sera la même que la somme des produits semblablement faits à l'égard de deux autres systèmes de forces équivalens respectivement aux deux proposés.*

Soient a, a'... les forces du premier système, et b, b'... celles du second système. Représentons par $\Sigma\ a.\ b.\ \cos.\ (a,b)$ la somme de tous les produits dont chacun sera formé d'une force du premier système, d'une force du second système et du cosinus de l'angle de ces deux forces; il s'agit de prouver que cette expression conservera la même valeur, quand aux deux systèmes de forces on substituera deux autres systèmes qui leur seront équivalens, respectivement.

Ainsi on aura $\Sigma\ a.\ b.\ \cos.(a,b) = \text{const.}$, quels que soient les deux systèmes de forces a, a'.... et b, b'..., parmi tous les systèmes équivalens, respectivement.

Pour démontrer ce théorème, il nous suffit de prouver qu'il a lieu quand on remplace une force d'un des deux systèmes par ses composantes suivant trois directions quelconques; car il aura lieu, dès-lors, dans ce nouveau système, si on y remplace un autre force quelconque par ses composantes suivant trois directions arbitraires; et comme ce n'est que par de telles décompositions de forces, et par des recompositions semblables qu'on change un système en un autre équivalent, il en résultera que le théorème sera démontré.

Soient a_x, a_y, a_z les trois composantes de la force a suivant trois axes quelconques menés par un de ses points. Le système des forces a, a',... sera remplacé par celui des forces a_x, a_y, a_z, a',...; et si on forme, relativement à ce nouveau système, l'expression analogue à $\Sigma a.\ b.\ \cos.(a,b)$, elle ne différera de celle-ci que par les termes où entre la force a, lesquels seront remplacés par des termes où entreront les forces a_x, a_y, a_z. Ainsi au lieu du terme $a.\ b.\ \cos.(a,b)$, on aura les trois termes $a_x.\ b.\cos.(a_x,b)$; $a_y\ b.\ \cos.(a_y,b)$; $a_z b.\ \cos.(a_z,b)$; mais ce premier terme est égal à la somme des trois autres, parce qu'on a

$$a.\cos.(a,b) = a_x.\ \cos.(a_x,b) + a_y.\ \cos.(a_y,b) + a_z.\ \cos.(a_z,b);$$

il s'ensuit donc que les deux sommes sous le signe Σ seront égales. Ainsi le théorème est démontré.

L'équation que nous venons d'admettre est fort connue, puisqu'elle exprime que la projection orthogonale de la force a sur la direction de la force b est égale à la somme des projections orthogonales sur cette même ligne, des trois composantes de la force a.

(3) La formule $\Sigma\ a.\ b.\ \cos.(a.b) = \text{const.}$ qui représente le théorème que nous venons de démontrer, est la base unique de tout cet écrit : elle est susceptible d'autres interprétations géométriques différentes, qui offrent des principes tout aussi généraux que le précédent. Ces principes donnent lieu à un

grand nombre de conséquences dont nous ne présenterons dans ce moment que celles qui sont de géométrie pure, remettant à un autre écrit celles qui renferment des formules de géométrie analitique.

(4) *Corollaire.* Supposons toutes les forces a, a'... appliquées à un même point, et soit A leur résultante : soit B la résultante des forces b, b'... supposées aussi appliquées toutes à un même point ; on aura, d'après le théorème que nous venons de démontrer,

$$A.\ B.\ \cos.\ (A,B) = \Sigma\ a.\ b.\ \cos.\ (a,b.)$$

(5) Si les forces b, b'... sont respectivement les mêmes que les forces a, a'..., cette équation devient

$$A^2 = \Sigma\ a^2 - 2\ \Sigma\ a.\ a'.\ \cos.\ (a,a').$$

C'est-à-dire que : *le carré de la résultante de plusieurs forces est égal à la somme des carrés de ces forces, plus deux fois la somme des produits de ces forces, multipliées deux à deux, et par le cosinus de l'angle qu'elles comprennent.*

(6) Quand des forces se font équilibre, la résultante de plusieurs d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante des autres ; on conclut donc des expressions des carrés des résultantes, que :

Quand des forces se font équilibre, la somme des carrés de plusieurs d'entre elles, prise arbitrairement, plus le double de la somme des produits de ces mêmes forces multipliées deux à deux, et par le cosinus de l'angle qu'elles comprennent, est égale à la somme des carrés de toutes les autres forces, plus le double de la somme des produits de ces forces multipliées deux à deux, et par le cosinus de l'angle qu'elles comprennent.

(7) *Remarque.* Les forces étant représentées en grandeur et en direction par des droites, on pourrait substituer dans l'énoncé du théorème 1 le mot *droite* au mot *force*. Alors on entendrait par *composantes* d'une droite ses projections sur trois axes quelconques menés par un de ses points ; et par *systèmes de droites équivalens*, deux systèmes de droites dont l'un serait

formé par la décomposition et la composition des droites de l'autre système, comme si ces droites étaient des forces.

Nous allons faire usage de cette remarque dans ce qui va suivre ; et nous supposerons toujours que chaque droite a une direction donnée, comme si elle représentait une force.

II.

(8) Lemme. *Si l'on projette une aire plane sur trois plans coordonnés quelconques* yz, xz *et* xy, *et si l'on décompose une droite, de grandeur donnée, et perpendiculaire au plan de cette aire, en trois autres dirigées suivant trois axes* ox', oy', oz', *respectivement perpendiculaires aux trois plans* yz, xz *et* xy, *les composantes de cette droite seront aux projections de l'aire plane comme la droite elle-même sera à cette aire.*

En effet, soit π l'aire plane, et a la droite menée perpendiculairement au plan de cette aire.

La projection de l'aire π sur le plan yz est égale à $\pi \cdot \dfrac{\sin.(\pi, x)}{\sin.(x, yz)}$;
et la projection de la droite a sur l'axe ox' est égale à $a \cdot \dfrac{\sin.(a, y'z')}{\sin.(x', y'z')}$.

Or, on a $\sin.(\pi, x) = \sin.(a, y'z')$, puisque la droite a et l'axe des x sont perpendiculaires repectivement aux plans π et $y'z'$; on a aussi $\sin.(x, yz) = \sin.(x', y'z')$ parce que les deux axes ox, ox' sont perpendiculaires respectivement aux deux plans $y'z'$, et yz. Le rapport de la projection de l'aire à la projection de la droite se réduit donc à $\dfrac{\pi}{a}$; ce qui démontre le lemme.

Ainsi, si l'aire π est représentée par la droite a perpendiculaire à son plan, les projections de cette aire sur trois plans coordonnés seront représentées par les projections de la droite a sur trois axes perpendiculaires à ces plans respectivement.

(9) *Corollaire*. Il résulte de ce principe que si l'on a un système d'aires planes situées dans des plans quelconques, et qu'on conçoive un système de droites perpendiculaires à ces

plans et proportionnelles aux aires respectivement, puis qu'on décompose ces droites, de manière à former un autre système équivalent (7), et qu'on conçoive dans des plans perpendiculaires à ces droites des aires qui soient avec elles respectivement, dans le rapport des aires proposées aux premières droites, on aura un nouveau système d'aires qu'on aurait pu former avec le système proposé par des projections des aires de ce système, analogues aux décompositions des premières droites. Nous dirons par cette raison que ce nouveau système d'aires est *équivalent* au système d'aires proposé; et l'aire qui correspondra à la résultante de toutes les droites sera l'aire *résultante* de toutes les aires; cette aire seule représentera un système équivalent au système des aires proposées. Nous appellerons *composantes* d'une aire ses projections sur trois plans quelconques, de même que nous appelons *composantes* d'une droite ses projections sur trois axes (*).

Les aires sont toujours positives, de même que les droites que nous leur supposons proportionnelles et perpendiculaires; mais leurs composantes pourront être prises négativement, et auront toujours les mêmes signes que les composantes correspondantes des droites relatives à ces aires. Ces signes proviennent des angles que ces droites font avec les axes suivant lesquels on les décompose.

(10) Le lemme précédent n'est au fond que le principe dont M. *Poinsot* s'est servi pour la composition et décomposition des couples. Envisagé d'une manière générale, par rapport à des aires planes quelconques, ce principe présente comme tout-à-fait évidentes des vérités qui ont été longtemps le sujet de beaux théorèmes sur la projection des aires planes et

(*) Il est entendu que les projections sur trois plans donnés se font par des droites parallèles respectivement aux trois droites d'intersections de ces plans, deux à deux; de même que les projections d'une droite sur trois axes se font par des plans parallèles respectivement aux trois plans que ces axes déterminent deux à deux.

sur la composition des momens. (Voyez *Géométrie de position* de M. *Carnot*, la *Statique* de M. *Poinsot*, la *Mécanique* de M. *Poisson*, et les *Élémens de géométrie à trois dimensions* de M. *Hachette*).

Ces diverses théorèmes, que nous pourrions énoncer sur-le-champ comme traductions directes, en vertu du lemme, des propriétés connues des systèmes de droites, ou systèmes de forces, peuvent être tous représentés par le principe général que voici :

(11) Théorème II. *Si l'on a deux systèmes d'aires planes* m, m' ... *et* n, n' ..., *et qu'on multiplie chaque aire du premier système par chaque aire du second système et par le cosinus de l'angle compris entre les plans des deux aires, la somme de tous les produits ainsi formés, que nous représenterons par* Σm.n. cos. (m, n), *aura une valeur qui restera constante quand on substituera aux deux systèmes d'aires deux autres systèmes équivalens.*

Soient a, a'... des droites proportionnelles aux aires du premier système et perpendiculaires à leurs plans, et b, b'... des droites proportionnelles aux aires du second système et perpendiculaires à leurs plans; on aura

$$\Sigma m.n. \cos. (m.n) = k.k' \Sigma a.b. \cos. (a, b) ;$$

k, k' étant deux constantes qui représentent les rapports des aires des deux systèmes, respectivement, aux droites a, a'..., et b, b'....

Si nous remplaçons les deux systèmes d'aires par deux autres systèmes d'aires μ, μ'... et ν, ν'... qui leur soient équivalens respectivement, à ces aires correspondront deux systèmes de droites α, α'..., et β, β'..., qui seront équivalens aux deux systèmes a, a'... et b, b'... (9); et l'on aura

$$\Sigma \mu.\nu. \cos. (\mu, \nu) = kk' \Sigma \alpha.\beta. \cos. (\alpha, \beta.)$$

Mais, d'après le théorème 1, on a

$$\Sigma a.b \cos. (a, b) = \Sigma \alpha.\beta. \cos. (\alpha, \beta)$$

On a donc aussi

$$\Sigma\, m.n. \cos.(m, n) = \Sigma\, \mu.\nu. \cos.(\mu, \nu).$$

Équation qui démontre le théorème énoncé.

(12) *Corollaire.* Soit M l'aire résultante de toutes les aires m, m'... du premier système, et N l'aire résultante de toutes les aires n, n'... du second système (9) ; on aura, d'après le théorème que nous venons de démontrer,

$$M.N.\cos.(M, N) = \Sigma m.n \cos.(m, n).$$

(13) Si les aires du second système sont respectivement les mêmes que les aires du premier système, cette formule devient celle-ci :

$$M^2 = \Sigma m^2 + 2\, \Sigma m.m' \cos.(m, m')$$

ce qui exprime que : *le carré de l'aire résultante d'un système d'aires est égal à la somme des carrés de ces aires, plus deux fois la somme des produits de ces aires multipliées deux à deux et par le cosinus de l'angle compris entre leurs plans.*

(14) *Corollaire* II. Supposons qu'il n'y ait qu'une aire r dans le second système ; la formule du corollaire précédent deviendra.

$$M.\cos.(M, n) = \Sigma\, m. \cos.(m, n);$$

ce qui fait voir que la somme des projections orthogonales d'un système d'aires sur un plan quelconque est égale à la projection orthogonale de l'aire résultante.

Il en serait de même si les projections étaient faites obliquement ; car les projections obliques de deux aires sont aussi les projections des projections orthogonales des deux aires sur un plan perpendiculaire aux droites qui projettent ; les projections orthogonales étant égales, les projections obliques des deux aires sont donc aussi égales. Ainsi, *la somme des projections*

d'un système d'aires, sur un plan, est toujours égale à la projection de l'aire résultante.

(15) Si les projections sont orthogonales, on en conclut que la somme des projections orthogonales d'un système d'aires, sur un plan, a la plus grande valeur possible quand ce plan est celui de l'aire résultante.

Ainsi l'*aire résultante d'un système d'aires planes n'est autre que la plus grande somme des projections orthogonales de ces aires sur un plan.*

Le carré de cette plus grande somme des projections orthogonales des aires est donc égal à $\Sigma m^2 + 2\Sigma m.m'.\cos.(m,m')$.

Il résulte aussi de là que la somme des projections orthogonales d'un système d'aires, sur un plan perpendiculaire à celui de l'aire résultante, est nulle.

(16) Théorème III. *Si l'on a deux systèmes de couples, et qu'on fasse le produit de chaque couple du premier système par chaque couple du second système et par le cosinus de l'angle compris entre les plans des deux couples, la somme de tous ces produits conservera la même valeur quand on remplacera les deux systèmes par deux autres systèmes de couples, respectivement équivalens.*

En effet, M. *Poinsot* a appris, en créant la théorie des couples, à les décomposer comme nous avons décomposé les aires planes, et à les représenter par des droites proportionnelles à leurs énergies, et perpendiculaires à leurs plans. On peut donc substituer dans le théorème II, au mot *aire*, celui de *couple*. Ainsi le théorème est démontré.

(17) *Corollaire.* Soient m, m'... les couples du premier système, et M leur couple résultant, et soient n, n'... les couples du second système et N leur couple résultant; on aura

$$M.N.\cos.(M,N) = \Sigma m.n.\cos.(m,n).$$

(18) Si les couples n, n'... du second système sont respectivement les mêmes que les couples m, m'... du premier système, cette formule deviendra

$$M^2 = \Sigma m^2 + 2\Sigma m.m'.\cos.(m,m').$$

(19) Quand on a un système de forces et qu'on prend leurs momens par rapport à un point fixe, ces momens ont les mêmes expressions que les énergies des couples formés par ces forces et par des forces égales, menées en sens contraire par le point fixe.

Si on change le système de forces en un autre équivalent, et qu'on prenne les momens de ces nouvelles forces par rapport au même point fixe, ces momens auront pareillement les mêmes expressions que les énergies des couples formés avec ces nouvelles aires. Les plans des momens sont les mêmes que ceux des couples. Nous pouvons donc substituer aux couples, dans le théorème III, les momens des forces qui donnent lieu à ces couples.

On a donc ce théorème général :

(20) Théorème IV. *Quand on a deux systèmes de forces, et qu'on prend les momens des forces du premier système par rapport à un point fixe, et les momens des forces du second système par rapport à un second point fixe; puis qu'on multiplie chaque moment du premier système par chaque moment du second, et par le cosinus de l'angle compris entre les plans des deux momens, la somme de tous ces produits conservera la même valeur si on substitue aux deux systèmes de forces deux autres systèmes équivalens dont on prendra les momens par rapport aux deux mêmes points fixes respectivement.*

Ainsi soient m, m'... les momens des forces du premier système, par rapport à un point fixe, et n, n'... les momens des forces du second système, par rapport à un second point fixe; et soient μ, μ'... et ν, ν'... les momens de deux autres systèmes de forces équivalens respectivement aux deux premiers; ces momens étant pris par rapport aux deux mêmes points fixes respectivement; on aura

$$\Sigma\, m.n \cos.(m, n) = \Sigma\, \mu.\nu \cos.(\mu, \nu).$$

(21) *Corollaire.* I. Supposons qu'il n'y ait dans le second

système qu'une seule force, et conséquemment, qu'un seul moment n; cette formule devient

$$\Sigma m. \cos.(m, n) = \Sigma \mu. \cos.(\mu, n);$$

le moment m étant le produit de deux lignes, représente une aire; m cos. (m, n) est la projection orthogonale de cette aire sur le plan n, on l'appelle la projection du moment m sur ce plan; cette équation prouve donc que :

La somme des projections orthogonales, sur un plan, des momens d'un système de forces, est égale à la somme des projections orthogonales des momens de tout autre système de forces équivalent.

Il est clair que cette égalité a pareillement lieu, quand les projections sont obliques (14).

Il est bien entendu que les momens sont tous pris par rapport à un même point.

(22) Toutes les forces peuvent être remplacées par deux forces dont l'une peut passer par le centre des momens; son moment sera nul; le moment de l'autre force aura donc sa projection sur un plan quelconque, égale à la somme des projections des momens de toutes les forces du système proposé.

Il suit de là que si les projections se font orthogonalement, leur somme aura une valeur *maximum* quand le plan de projection sera celui du moment en question. Ce moment unique s'appelle le moment *principal* du système de forces, relatif au point pris pour centre des momens.

Ainsi *le moment principal d'un système de forces, relatif à un point, est égal à la plus grande somme des projections orthogonales, sur un plan, des momens de toutes les forces pris par rapport à ce point.*

(23) *Corollaire* II. Pour avoir la valeur de ce moment principal, supposons que dans le théorème IV toutes les forces du second système soient respectivement les mêmes que les forces du premier système, et qu'on prenne les momens des deux systèmes par rapport au même point; il résultera de ce théorème

que l'expression $\Sigma m^2 + 2\Sigma m m' \cos.(m, m')$ conserve la même valeur quand on change le système de forces en un autre équivalent.

Soit donc M le moment principal du système de forces, ce moment étant seul dans un système de deux forces qui peuvent remplacer le système proposé, on aura

$$M^2 = \Sigma m^2 + 2\Sigma m.m' \cos.(m, m').$$

Ainsi *le carré du moment principal d'un système de forces pris par rapport à un point, est égal à la somme des carrés des momens de ces forces, plus le double de la somme des produits de ces momens multipliés deux à deux, et par le cosinus de l'angle compris entre leurs plans.*

(24) *Remarque.* Cette dernière formule, et celle qui donne le carré de la résultante d'un système de forces (5), ont été données en premier lieu par M. *Binet*, dans un mémoire lu à l'Institut de France en 1814, (*voyez* 17[e] cahier des journaux de l'École polytechnique); puis démontrées par M. *Giorgini*, dans un excellent écrit sur la théorie analitique des projections. (*).

(25) On voit d'après ces formules que les deux équations

$$\Sigma a^2 + 2\Sigma a.a' \cos.(a, a') = o,$$

et

$$\Sigma m^2 + 2\Sigma m.m' \cos.(m, m') = o,$$

où a, a'... sont des forces appliquées à un corps solide libre, et m, m'... les momens de ces forces par rapport à un point quelconque, sont l'expression géométrique des deux conditions d'équilibre données par M *Poinsot*; et qu'elles remplacent complètement les six équations par lesquelles on a coutume d'exprimer l'équilibre d'un corps solide libre.

(*) *Teoria analitica delle projezioni di* Gaetano Giorgini. Lucca, 1820. (Voy. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, tom. IV, pag. 129.)

III.

(26) Théorème V. *Quand on a un système de droites et un système d'aires, si l'on fait le produit de chaque droite par chaque aire et par le sinus de l'angle que cette droite fait avec le plan de cette aire, la somme des produits ainsi formés aura une valeur qui restera constante quand on substituera au système de droites et au système d'aires, deux autres systèmes de droites et d'aires qui leur soient équivalens.*

Soient a, a'... les droites, et m, m'... les aires; et soient α, α'... d'autres droites formant un système équivalent à celui des premières, et μ, μ'... d'autres aires formant aussi un système équivalent à celui des aires m, m'...; il faut prouver qu'on a toujours

$$\Sigma\, a.\, m.\, \sin\, (a\,,\, m) = \Sigma\, \alpha.\, \mu.\, \sin.\, (\alpha\,,\, \mu).$$

Concevons des droites b, b'... perpendiculaires aux plans des aires m, m'... et proportionnelles à ces aires, on aura $m = kb$, $\sin. (a\,, m) = \cos. (a, b)$, ... et par conséquent

$$\Sigma\, a.\, m.\, \sin.\, (a\,,\, m) = k.\Sigma\, a.\, b.\, \cos.\, (a, b).$$

Soient les droites c, c'... proportionnelles aux aires μ, μ'... et perpendiculaires à leurs plans, on aura

$$\Sigma\, \alpha.\, \mu.\, \sin.\, (\alpha\,,\, \mu) = k\Sigma\, \alpha.\, \mathsf{c}.\, \cos.\, (\alpha, \mathsf{c}).$$

Mais les deux systèmes d'aires m, m', ... et μ, μ'... étant équivalens, les deux systèmes de droites b, b'... et c, c'..., sont aussi équivalens (9); et les deux systèmes de droites a, a', ... et α, α', ..., sont équivalens par supposition; on a donc:

$$\Sigma\, a.\, b.\, \cos.\, (a, b) = \Sigma\, \alpha.\, \mathsf{c}.\, \cos.\, (\alpha, \mathsf{c}),$$

d'après le théorème I.

système de forces, par rapport à un point fixe, ces momens peuvent être considérés comme un système d'aires; et que si l'on remplace le système de forces par un autre équivalent, les momens de ces nouvelles forces, formeront un nouveau système d'aires équivalent au premier; nous pouvons donc substituer dans le théorème général V, les momens d'un système de forces au système d'aires; et en considérant les droites comme des forces, on aura cette propriété de deux systèmes de forces.

Théorème VII. *Quand on a deux systèmes de forces, si on prend les momens des forces du premier système, par rapport à un point fixe, et qu'on multiplie chacun de ces momens par chaque force du second système, et par le sinus de l'angle que cette force fait avec le plan du moment, la somme de tous ces produits restera la même quand on remplacera les deux systèmes de forces par deux autres systèmes, respectivement équivalens.*

Ainsi, soient m, m'... les momens des forces du premier système, et b, b'... les forces du second système, la somme $\Sigma\, b. m. \sin. (b, m)$, aura une valeur qui restera constante, quand on changera les deux systèmes de forces en deux autres systèmes respectivement équivalens.

(33) Le signe de chaque terme de la somme $\Sigma\, b. m. \sin. (b, m)$, dépendra de la direction de la force b, et de la direction de la droite par laquelle on représentera le moment m; car à $\sin. (b, m)$, on substituera le cosinus de l'angle de ces deux droites, lequel sera positif ou négatif, et ce cosinus donnera son signe au terme dans lequel il entre.

Mais on peut aussi déterminer les signes des termes de la somme $\Sigma\, b. m. \sin. (b, m)$, sans avoir besoin de considérer des droites perpendiculaires aux momens m, m'...

Car il est facile de voir qu'on peut, en plaçant l'œil à l'extrémité de chaque force b, et en dirigeant la vue vers le point d'application de cette force, regarder dans quel sens la force dont on a combiné le moment m avec la force b, tend à tourner; et donner au terme $b. m. \sin. (b, m)$, le signe + ou le signe —, suivant que cette droite tendra à tourner à droite ou à gauche; et ainsi à l'égard des autres termes.

(34) Soient a, a'... les forces du premier système, dont nous avons désigné les momens par m, m', ... ; et soient n, n', ... les momens des forces b, b', ... du second système, pris par rapport au centre des momens m, m', ... La somme $\Sigma\, a.\, n.\, \sin.(a, n)$, aura une valeur qui restera constante de même que celle de $\Sigma\, b.\, m.\, \sin.\,(b, m)$, quand on changera les deux systèmes de forces en deux autres équivalens. La somme

$$S = [\Sigma\, a.\, n.\, \sin.\,(a, n) + \Sigma\, b.\, m.\, \sin.\,(b, m)],$$

conservera donc aussi la même valeur.

Soient CD une des forces a, a', ... du premier système, EF une des forces b, b', ... du second système, et O le centre des momens. Les deux forces CD, EF, combinées ensemble, donneront dans la somme S les deux termes

$$2\,\text{ai.}\,OCD \times EF.\sin.(EF, OCD),\ \text{et}\ 2\,\text{ai.}\,OEF \times CD \sin.(CD, OEF).$$

La somme de ces deux termes, divisée par 6, est égale au volume de la pyramide qui a pour sommets les quatre points C, D, E, F; car le premier, divisé par 6, est égal à la somme des volumes des tétraèdres qui ont pour sommet commun le point O, et pour bases les deux triangles ECD, FCD; et le second, divisé par 6, est égal à la somme des volumes des tétraèdres qui ont pour sommet commun le point O et pour bases les deux triangles CEF, DEF. Donc la somme de ces deux termes, divisée par 6, est égale à la somme des volumes des quatre tétraèdres qui ont pour sommet commun le point O, et pour bases les quatre faces du tétraèdre CDEF, laquelle somme est, comme on sait, égale au volume de ce tétraèdre. Ce tétraèdre a pour arêtes opposées les deux forces CD, EF, appartenant respectivement aux deux systèmes de forces a, a', ... et b, b', ... La somme S est donc la somme des volumes des tétraèdres construits sur une force du premier système et une force du second système, comme arêtes opposées; on a donc ce théorème :

Théorème VIII. *Quand on a deux systèmes de forces, si sur chaque force du premier système et chaque force du second*

système, comme arêtes opposées, on construit un tétraèdre, la somme des volumes de tous ces tétraèdres restera constante quand on substituera aux deux systèmes de forces, deux autres systèmes qui leur soient équivalens respectivement.

(35) Dans cette somme de tétraèdres, le signe de chacun d'eux est le même que le signe de la quantité [$a.\ n.$ sin. (a, n) $+ b.\ m.$ sin. (b, m)] qui exprime ce tétraèdre. Mais les deux termes de cette quantité ont toujours le même signe; car il est visible que si la force b, vue, comme nous l'avons dit (33), de l'extrémité de la force a, semble tourner à droite, la force a, vue de l'extrémité de la force b, tendra à tourner aussi à droite, et qu'ainsi les deux termes en question ont toujours le même signe. Concevons, par exemple, trois axes coordonnés des x, y et z; prenons l'axe des y positives pour la force a, son point d'application étant à l'origine des coordonnées; et supposons la force b dans le plan des xz et parallèle à l'axe des z positives, son point d'application étant sur l'axe des x positives.

La force a, vue de l'extrémité de la force b, tendra à tourner de droite à gauche; et la force b, vue de l'extrémité de la force a, tendra aussi à tourner de droite à gauche. Ainsi les deux forces, vues réciproquement de leurs extrémités, tendent à tourner autour l'une de l'autre dans le même sens, ainsi que nous l'avons avancé.

Il faut bien observer que la vue doit toujours se diriger de l'extrémité d'une force vers son point d'application; si le contraire avait lieu, le sens de la rotation de l'autre force changerait. Par exemple, si l'œil est placé sur l'axe des y négatives, et la vue dirigée vers l'origine, la force b tendra à tourner de gauche à droite; tandis que, vue dans l'autre sens, elle tend à tourner de droite à gauche.

(36) Ainsi nous pouvons dire que :

Dans le théorème VIII, pour connaître le signe du volume de chaque tétraèdre, il faut voir le sens de la rotation d'une des deux forces qui forment ce tétraèdre, autour de l'autre force, la vue étant dirigée en sens contraire de la direction de cette seconde force. On donnera au volume de chaque tétraèdre le

signe +, ou le signe —, suivant que la rotation se fera dans un sens ou dans l'autre.

(37) *Corollaire.* Supposons que les forces b, b'... du second système, soient respectivement les mêmes que les forces du premier système, le théorème VIII, donnera celui-ci :

Quand on a deux systèmes de forces équivalens, la somme des volumes des tétraèdres construits sur les forces du premier système, prises deux à deux, comme arêtes opposées, est égale à la somme des volumes des tétraèdres construits semblablement sur les forces du second système.

Les signes des volumes des tétraèdres seront déterminés, comme nous venons de le dire, par le sens dans lequel l'une des deux forces qui donnent lieu à chaque tétraèdre, tendra à tourner autour de l'autre force, pour un œil placé à l'extrémité de cette seconde force.

(38) On conclut du théorème précédent que :

De quelque manière qu'on remplace par deux forces un système de forces appliquées à un corps solide libre, le tétraèdre construit sur ces deux forces, comme arêtes opposées, a toujours le même volume.

(39) Ce volume sera nul si les deux forces sont dans un même plan, auquel cas elles formeront un couple, ou bien auront une résultante unique, et réciproquement; donc

La condition géométrique pour qu'un système de forces appliquées à un corps solide libre ait une résultante unique, ou se réduise à un couple, est que la somme des volumes des tétraèdres construits sur ces forces, prises deux à deux, comme arêtes opposées, soit nulle.

(40) Le théorème (38) fait encore voir, d'après ce que nous avons dit sur le signe qui convient au volume de chaque tétraèdre, que :

De quelque manière qu'on remplace par deux forces un système de forces quelconques, l'une de ces deux forces étant vue de l'extrémité de la seconde force tendra toujours à tourner dans le même sens autour de cette seconde force.

Quand des forces, en nombre quelconque, appliquées à

un corps solide libre, se font équilibre, si aux points d'application de plusieurs de ces forces on applique des forces qui leur soient respectivement égales, et directement opposées, ces nouvelles forces formeront un système équivalent aux autres forces du système proposé; on conclut donc du théorème (37) que :

Quand des forces appliquées à un corps solide libre se font équilibre, la somme des volumes des tétraèdres construits sur plusieurs de ces forces, prises deux à deux, comme arêtes opposées, est toujours égale à la somme des volumes des tétraèdres construits sur les autres forces, prises deux à deux, comme arêtes opposées.

(42) Donc : *quand quatre forces se font équilibre, le volume du tétraèdre construit sur deux quelconques d'entre elles est égal au volume du tétraèdre construit sur les deux autres* (*).

(43) Les théorèmes sur les systèmes de forces que nous venons de déduire d'une proposition générale sur les systèmes d'aires combinés avec des systèmes de droites, peuvent être démontrés directement de plusieurs manières.

Nous ferons d'abord remarquer que le théorème relatif aux systèmes équivalens de deux forces seulement, est une conséquence, ou plutôt, n'est qu'une traduction géométrique de la propriété suivante des couples, donnée par M. *Poinsot* dans son Mémoire sur la composition des momens. « De quelque » manière qu'on réduise un système de forces à une force unique et à un couple, le produit du moment du couple par le » sinus de l'angle que son plan fait avec cette force est constant. » (Voyez *Statique de Poinsot*, 4e édit., pag. 319.)

Multipliant ce produit constant par la force unique R qui est aussi constante, et supposant qu'une des deux forces F et — F

(*) Quatre forces qui se font équilibre jouissent de plusieurs autres propriétés, par exemple, de celle-ci, facile à démontrer : *Ces quatre forces sont toujours les génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde à une nappe.*

qui composent le couple, la seconde — F par exemple, passe par le point d'application de cette force R, on en conclut que : « la pyramide qui a pour arêtes opposées la force R et la » force F du couple, a un volume constant. » Or, la force F du couple se combine avec la force R, et il en résulte une autre force F′ dont l'extrémité est à la même distance du plan du couple que l'extrémité de la force R ; donc le volume de la pyramide qui a pour arêtes opposées cette nouvelle force F′ et la force F du couple, est égal au volume de la première pyramide, et par conséquent est constant ; mais ces deux forces F et F′ remplacent tout le système, le théorème (38) est donc démontré.

(44) Quant au théorème général VIII, voici comment on le démontre directement.

Il suffit de faire voir, d'après le raisonnement que nous avons fait pour démontrer le théorème I, que si on remplace une force quelconque a d'un des deux systèmes par ses trois composantes a_x, a_y, a_z, suivant trois axes menés par un de ses points, on aura l'équation

$$\text{Pyr.}\,(a,b) = \text{Pyr.}\,(a_x, b) + \text{Pyr.}\,(a_y, b) + \text{Pyr.}\,(a_z, b).$$

Or, si on prend les momens de la force a et de ses composantes, par rapport au point d'application de la force b, et qu'on les projette orthogonalement sur le plan mené par ce point perpendiculairement à cette force, la projection du moment de la force a sera égale à la somme des projections des momens de ses trois composantes (21).

r étant la plus courte distance de la force a à la force b, la projection du moment de la force a sera $a.r.$ sin. (a, b), ou $\frac{a.b.r.\ \text{sin.}\,(a,b)}{b.}$. Le numérateur est égal à six fois le volume de la pyramide qui a pour base la projection du moment, et pour sommet l'extrémité de la force b. Or, en supposant que la force a ait son point d'application sur le plan de projection, on voit sur-le-champ que le volume de cette pyramide est le

même que celui de la pyramide qui a pour arêtes opposées les deux forces a et b; car ces deux pyramides ont trois sommets communs, et leurs quatrièmes sommets sont sur une parallèle au plan de ces trois premiers. Ainsi $a.b.r.$ sin. (a, b) exprime six fois le volume de la pyramide qui a pour arêtes opposées les forces a et b. Les projections des momens des forces a_x, a_y, a_z seront pareillement exprimées par les volumes des pyramides qui auront pour arêtes opposées la force b et chacune de ces forces, ces volumes étant multipliés par six et divisés par b; l'équation qui a lieu entre les projections des momens donne donc l'équation entre les volumes des pyramides; ce qu'il s'agissait de prouver.

Ainsi le théorème est démontré.

On voit bien par cette démonstration comment on doit prendre les signes des volumes des pyramides. Car dans l'équation des momens on sait qu'on doit prendre avec le signe + ceux des forces qui tendent à tourner dans un sens, et avec le signe — ceux des forces qui tendent à tourner dans le sens contraire pour un œil placé à l'extrémité de la force b et qui dirige sa vue vers le point d'application de cette force (*).

(*) Les théorèmes (37 et 38) que nous avions eu occasion d'énoncer ailleurs, et qui sont des conséquences d'un théorème plus général (théorème VIII), dont nous avons donné deux démonstrations, ont été démontrés différemment par M. *Gergonne* et par M. *Mœbius*. (Voy. *Annales de Mathématiques*, tom. XVIII, nº 12; *Journal* de M. *Crelle*, tom. IV, 2e livraison, et *Bulletin des Sciences Mathématiques*, septemb. 1828 et septemb. 1829). M. *Giorgini*, de son côté, était parvenu précédemment à ces théorèmes. Lui ayant communiqué l'an dernier plusieurs propriétés générales des systèmes de deux forces équivalens, objet dont il venait de s'occuper pour faire suite à sa théorie des projections, j'eus la satisfaction d'apprendre, qu'ainsi que cela nous était arrivé souvent dans nos premières études, nous nous étions rencontrés dans la plupart des résultats, quoiqu'ayant suivi deux marches différentes.

Je donnerai dans un autre moment ces propriétés générales des systèmes de deux forces équivalens, et leur application à un mode de transformation des relations métriques des figures.

SECONDE PARTIE.

QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES POLYGONES, DES POLYÈDRES ET DES CENTRES DES MOYENNES DISTANCES.

IV.

(45) Les théorèmes relatifs aux systèmes de forces conduisent immédiatement à des propriétés générales des polygones, des polyèdres, et des centres des moyennes distances, que nous allons présenter rapidement.

PROPRIÉTÉS DES POLYGONES.

(46) La somme des projections des côtés d'un polygone, plan ou gauche, sur une droite quelconque, est toujours égale à zéro, de même que la somme des projections d'un système de forces qui se font équilibre. Cela fait voir, comme on sait, que quand on a un système de forces en équilibre, si on les transporte parallèlement à elles-mêmes, et qu'on les mette bout à bout, c'est-à-dire de manière que chacune d'elles ait pour point d'application l'extrémité de celle qui la précède, on formera un polygone fermé; les angles de ce polygone seront évidemment égaux aux supplémens des angles que les forces font entre elles ; on conclut donc du théorème (6) cette belle propriété des polygones, due à M. *Carnot* (*Géométrie de position*, pag. 309.)

Dans tout polygone, la somme des carrés d'un nombre quelconque de côtés, moins deux fois la somme des produits de ces côtés, multipliés deux à deux, et par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent, est égale à la somme des carrés de tous les autres côtés, moins deux fois la somme des produits de ces autres côtés multipliés deux à deux et par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.

Ce théorème général est susceptible de plusieurs conséquences qui sont d'autres belles propriétés des polygones exposées aussi par M. *Carnot*.

(47) Il est clair que de ces théorèmes on peut passer aux propositions relatives aux systèmes de forces, de même que de celles-ci nous venons de passer aux propriétés des polygones.

(48) Remarquons que le théorème précédent donne cette propriété du quadrilatère :

Dans tout quadrilatère, plan ou gauche, la somme des carrés de deux côtés opposés, moins le double du produit de ces deux côtés, multiplié par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent, est égale à la somme des carrés des deux autres côtés, moins le double du produit de ces deux côtés, multiplié par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.

(49) Puisque des forces égales respectivement aux côtés d'un polygone, dirigées dans le même sens qu'eux, et appliquées à un même point se font équilibre (46), il est clair que si ces côtés du polygone sont considérés eux-mêmes, en grandeur et en direction, comme des forces, ces forces se réduiront à un couple; d'où l'on conclut, d'après le théorème (39), cette propriété générale des polygones :

Si sur les côtés d'un polygone gauche, pris deux à deux, comme arêtes opposées, on construit des tétraèdres, la somme de leurs volumes sera égale à zéro.

(50) On peut transporter parallèlement à eux-mêmes, et placer d'une manière quelconque dans l'espace, les côtés du polygone; le théorème aura évidemment encore lieu, c'est-à-dire que la somme des volumes des tétraèdres construits sur ces côtés pris deux à deux, comme arêtes opposées, sera égale à zéro.

(51) Quand des forces se réduisent à un couple, le centre des moyennes distances de leurs extrémités est le même que le centre des moyennes distances de leurs points d'application, (ce qui résulte d'un théorème que nous avons démontré dans la *Correspondance mathématique*, tom. V, pag. 106); nous pouvons donc énoncer cette propriété des polygones :

Si, par des points pris arbitrairement dans l'espace, on mène des droites égales et parallèles aux côtés d'un polygone gauche et dirigées dans le même sens qu'eux, le centre des moyennes distances des extrémités de ces droites se confondra avec le centre des moyennes distances des points par lesquels on les a menées (*).

(52) La réciproque de cette proposition a évidemment lieu, c'est-à-dire que :

Si par des points, pris arbitrairement, on mène des droites telles que le centre des moyennes distances de leurs extrémités se confonde avec celui de ces points, on pourra former un polygone dont les côtés seront égaux et parallèles à ces droites.

(53) On conclut immédiatemment de là ce théorème :

Si par des points pris dans l'espace on mène des droites de direction et de longueur arbitraires, et qu'on les projette orthogonalement sur un plan perpendiculaire à la droite qui joint le centre des moyennes distances de leurs extrémités au centre des moyennes distances des points par lesquels on les a menées, les projections de ces droites seront égales et parallèles aux côtés d'un polygone fermé.

PROPRIÉTÉS DES POLYÈDRES.

(54) D'un point o pris dans l'intérieur d'un polyèdre abaissons des perpendiculaires sur toutes ses faces ; la somme des produits de ces perpendiculaires par les aires de ces faces respectivement sera égale à trois fois le volume du polyèdre. Si d'un second point o' on abaisse semblablement des perpendiculaires sur les faces du polyèdre, la somme de leurs produits par les aires de ces faces aura même valeur que la première

(*) Ce théorème se trouve parmi plusieurs autres du même genre, fort intéressans, dans un mémoire de M. *Sturm*, sur la théorie analitique des polygones. (Voy. *Annales de Mathématiques*, avril 1825.)

somme. La différence de ces deux sommes est donc égale à zéro; ce qui signifie que la somme des aires du polyèdre, multipliées respectivement par les différences des perpendiculaires abaissées des deux points sur ces aires, est égale à zéro; d'où il suit que la somme des aires du polyèdre multipliées respectivement par les cosinus des angles que la droite oo' fait avec les perpendiculaires abaissées d'un des deux points sur ces faces, est égale à zéro. Si donc on prend sur ces perpendiculaires des lignes proportionnelles aux aires des polyèdres, respectivement, la somme des projections orthogonales de ces lignes sur la droite oo' sera égale à zéro. Comme cette ligne oo' a une direction arbitraire, il résulte de là que toutes ces lignes étant considérées, en grandeur et en direction, comme des forces, ces forces se feront équilibre.

Ces lignes étant menées toutes d'un point intérieur au polyèdre, perpendiculairement à ses faces, font entre elles des angles qui sont supplément des angles dièdres du polyèdre.

Donc si on transporte ces lignes parallèlement à elles-mêmes, et qu'on les mette bout à bout en leur conservant leur direction, elles formeront un polygone fermé dont les angles seront égaux aux angles dièdres du polyèdre (46). On a donc cette propriété générale des polyèdres :

Étant donné un polyèdre quelconque, on peut toujours former, d'une infinité de manières, un polygone dont les côtés soient proportionnels aux aires des faces du polyèdre, et fassent entre eux des angles égaux à ses angles dièdres.

Ce principe conduit aisément à plusieurs propriétés générales des polyèdres.

(55) D'abord on voit que le théorème (46), sur les polygones, donne lieu au suivant, démontré différemment dans la *Géométrie de Position* :

Dans tout polyèdre, la somme des carrés de plusieurs faces, moins le double de la somme de ces faces multipliées deux à deux, et par le cosinus de l'angle qu'elles comprennent, est égale à la somme des carrés de toutes les autres faces, moins le double de la somme des produits de ces autres faces mul-

tipliées deux à deux, et par le cosinus de l'angle qu'elles comprennent.

(56) Ce théorème est susceptible de plusieurs conséquences; nous nous bornons à celle-ci :

Dans tout tétraèdre, la somme des carrés de deux faces, moins le double du produit de ces faces multiplié par le cosinus de l'angle qu'elles comprennent, est égale à la somme des carrés des deux autres faces, moins le double du produit de ces deux faces multiplié par le cosinus de l'angle qu'elles comprennent.

(57) Des théorèmes (50 — 51) on conclut encore, d'après le principe (54), cette double proposition :

Si par des points pris respectivement sur chaque face d'un polyèdre, on mène, du côté de leur revers, des droites proportionnelles aux aires de ces faces, et perpendiculaires à leurs plans :

1° *La somme des volumes des tétraèdres construits sur ces droites, prises deux à deux, comme arêtes opposées, sera égale au zéro;*

2° *Le centre des moyennes distances des extrémités de ces droites, sera le même que le centre des moyennes distances des points pris sur les faces du polyèdre.*

(58) Concevons un polyèdre quelconque, et un polygone dont les côtés soient proportionnels aux faces du polyèdre, et perpendiculaires à leurs plans. Projetons orthogonalement le polygone sur un plan fixe; nous aurons un second polygone dont les côtés seront perpendiculaires aux traces des faces du polyèdre sur le plan, et seront proportionnels aux aires de ces faces multipliées respectivement par les sinus des inclinaisons de ces faces sur le plan. Les théorèmes relatifs à ce polygone plan donneront lieu à des propriétés du polyèdre.

Ainsi, si l'on mène un axe fixe dans le plan du polygone, la somme de ses côtés multipliés respectivement par les cosinus des angles qu'ils feront avec cet axe sera égale à zéro; ces cosinus sont égaux aux sinus des angles que les traces des faces du polyèdre sur le plan font avec l'axe fixe; on a donc ce théorème :

Dans tout polyèdre, la somme des aires de ses faces multipliées respectivement par les sinus de leurs inclinaisons sur un plan quelconque, et par les sinus des angles que les traces de ces faces sur ce plan font avec un axe fixe mené dans ce plan, est égale à zéro (*).

(59) Le théorème (46) appliqué à notre polygone plan, donne cette propriété des polyèdres :

Dans tout polyèdre, la somme des carrés de plusieurs faces multipliées respectivement par les sinus de leurs inclinaisons sur un plan fixe, moins deux fois la somme des produits de ces faces multipliées deux à deux, et par les sinus de leurs inclinaisons sur le plan, et par le cosinus de l'angle que leurs traces sur ce plan font entre elles, est égale à la somme des carrés des autres faces, moins deux fois la somme des produits de ces faces multipliées deux à deux, et par les sinus de ces inclinaisons, et par le cosinus de l'angle que leurs traces sur le plan font entre elles.

(60) On conclut de là, comme corollaire, que :

Dans tout polyèdre, la somme des carrés de ses faces, multipliées respectivement par les sinus de leurs inclinaisons sur un plan fixe, est égale au double de la somme des produits de ces faces multipliées deux à deux, et par les sinus de ces inclinaisons, et par le cosinus de l'angle que leurs traces sur le plan fixe comprennent entre elles.

SUR LE CENTRE DES MOYENNES DISTANCES D'UN SYSTÈME DE POINTS.

(61) Soient m points p, p'... situés d'une manière quelconque dans l'espace; si d'un point fixe O on mène des droites à ces points, et qu'on suppose que des forces représentées en gran-

(*) En prenant pour le plan celui d'une des faces du polyèdre, et pour l'axe fixe une perpendiculaire à l'un des côtés de cette face, on aura le théorème donné par M. *Lhuilier*, dans la *Bibliothèque universelle de Genève*, avril 1828. (Voy. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, tom. X, pag. 179.)

deur et en direction par ces droites, sollicitent le point O, leur résultante passera, comme on sait, par le centre des moyennes distances G des points p, p'..., et sera égale à m fois la distance de ce centre au point O. (*Correspondance mathématique*, tom. V, pag. 105); on aura donc, d'après la formule du n° 5.,

$$m^2\,\overline{OG}^2 = \Sigma\,\overline{Op}^2 + 2\Sigma\,\overline{Op}.\overline{Op'}.\cos.(pOp').$$

c'est-à-dire que :

Si d'un point quelconque O, on mène des droites aboutissantes à des points pris arbitrairement dans l'espace, la somme des carrés de ces droites, plus le double de la somme des produits de ces droites multipliées deux à deux, et par le cosinus de l'angle qu'elle comprennent, sera égale au carré de la droite menée de ce point O au centre des moyennes distances de tous les points multiplié par le carré du nombre des points.

On sait qu'on a $\Sigma\overline{Op}^2 = \Sigma\overline{Gp}^2 + m\overline{OG}^2$ (*Géométrie de Position*, p. 317). On déduit de cette équation et de celle du théorème précédent,

$$2\Sigma\overline{Op}.\overline{Op'}.\cos.(pOp') = m(m-1)\,\overline{OG}^2 - \Sigma\overline{Gp}^2.$$

Équation qui donne cette propriété générale du centre des moyennes distances d'un système de points :

Si d'un point pris arbitrairement sur la surface d'une sphère décrite du centre des moyennes distances d'un système de points, on mène des rayons à ces points, et qu'on fasse les produits de ces rayons deux à deux, et par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent, la somme de tous ces produits sera constante, quel que soit le point pris sur la sphère.

(63) Si le point O se confond avec le point G, la formule précédente se réduit à $2\Sigma\overline{Gp}.\overline{Gp'}\cos.(pGp') = -\Sigma\overline{Gp}^2$. Supposons que les points p, p'... soient les sommets d'un polygone régulier, le point G sera le centre du cercle circonscrit à ce polygone, et cette équation deviendra $\Sigma\cos.(pGp') = -\frac{m}{2}$; ce qui prouve que

Si on divise la circonférence du cercle en m *parties égales, la somme des cosinus des arcs compris entre les* m *points de division pris deux à deux, sera égale à* $-\frac{m}{2}$.

(64) Il est facile d'appliquer au centre de gravité d'un système de points matériels les théorèmes que nous venons de donner sur les centres des moyennes distances.

Il suffit de remarquer que le centre de gravité d'un système de points A, B, C, ... qui ont des masses m, m', m'', ..., est le même que le centre des moyennes distances d'un système de points dont m de ces points sont confondus en A, m' autres sont confondus en B, m'' en C, etc.

Ainsi le théorème (62) donne celui-ci :

Si d'un point pris arbitrairement sur la surface d'une sphère décrite du centre de gravité d'un système de points matériels, situés d'une manière quelconque dans l'espace, on mène des rayons aboutissans à ces points, la somme des produits de ces rayons multipliés deux à deux, par leurs masses et par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent sera une quantité constante, quel que soit le point pris sur la sphère.

Note sur l'expression de l'aire d'un quadrilatère donnée par M. *Lefèvre* dans son *Traité d'arpentage*, tome I, page 93, par M. Verhulst, docteur en sciences.

La formule que nous signalons, est

$$\text{aire du quadrilatère} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

s désignant la demi-somme des quatre côtés a, b, c, d. Elle exprime, comme on voit, la surface du polygone, *uniquement en fonction de ses quatre côtés;* ce qui est d'une absurdité manifeste, car avec quatre droites, on peut former une

infinité de quadrilatères très-différens en surface. Elle ne devient exacte que dans le seul cas où le quadrilatère est inscriptible. (*Voyez* les notes à la suite de la *Géométrie* de M. *Legendre*.)

Dans le cas d'un quadrilatère formé par deux triangles rectangles ; ayant l'hypothénuse commune, la formule se simplifie et devient

$$\text{aire du qua.} = (s-a)(s-b) = \text{A}.$$

En effet a et b, c et d, désignant les côtés contigus de chaque angle droit, on a

$$\text{A} = \frac{ab + cd}{2} = \frac{2ab + 2cd}{4}$$

Or, si l'on multiplie

$$\frac{c+d+b-a}{2} = s-a, \quad \text{par} \quad \frac{c+d-b+a}{2} = s-b,$$

il vient $(s-a)(s-b) = \frac{(c+d)+(b-a)}{2} \times \frac{(c+d)-(b-a)}{2}$

$$= \frac{(c+d)^2-(b-a)^2}{4} = \frac{(c^2+d^2-a^2-b^2)+2ab+2cd}{4}$$

Mais $c^2 + d^2 - a^2 - b^2 = o$, puisque les deux triangles ont même hypothénuse : il reste donc

$$(s-a)(s-b) = \frac{2ab + 2cd}{4} = \text{A}. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Lettre de M. Plateau *au Rédacteur, relative à différentes expériences d'optique.*

Je m'empresse de vous envoyer les détails que vous m'avez

demandés relativement aux apparences produites par le mouvement simultané de deux lignes (*).

D'abord, voici de quoi se compose l'instrument dont je me sers, et qui est représenté ci-joint, fig. 1, pl. III. Deux petites poulies de cuivre *a* et *b* communiquent, à l'aide de cordons sans fin, avec une grande poulie en bois *c* à double gorge; les diamètres de ces petites poulies sont tels que, les deux cordons étant également tendus et le système étant mis en mouvement au moyen de la manivelle *d*, la vitesse de l'une soit un multiple exact de celle de l'autre; leurs axes se terminent en forme de vis, de manière à pouvoir y fixer par de petits écrous les figures de carton que l'on veut soumettre à l'expérience. Ces poulies sont soutenues par des supports en fer *f* et *g* qui, glissent dans deux rainures pratiquées parallèlement au côté *hh*, dans la petite table qui soutient l'instrument, et éloignées entre elles d'un pouce environ; on fixe ces supports au moyen des écrous *l*, *m*.

On voit que pour produire, à l'aide de cet appareil, une image curviligne, il suffira d'attacher sur les axes des petites poulies deux lignes découpées dans du carton blanc d'une solidité suffisante; puis, de se placer devant l'instrument et de communiquer aux poulies un mouvement assez rapide au moyen de la manivelle. Il faut faire en sorte que les courbes mobiles soient bien éclairées, et afin qu'elles se dessinent sur un fond noir, on fixe sur la poulie la plus éloignée de l'œil, et derrière la courbe blanche qu'elle supporte, un grand disque de papier noir qui tourne avec elle et qui cache la poulie et son support; enfin, on place derrière tout le système une feuille de carton également noir.

Cet instrument très-simple permet de faire varier à volonté tous les élémens dont dépend la nature de l'image que l'on veut produire; en effet: 1° Les courbes mobiles pouvant se placer

---

(*) Voyez la *Correspondance math. et phys.*, tom. IV, pag. 393.

avec facilité sur les axes des poulies et s'enlever de même, on est maître d'en changer la nature, ainsi que les positions initiales; 2° en employant des cordons de différentes longueurs, et en faisant glisser les supports dans leurs rainures, on modifie la distance apparente des deux centres de mouvement; 3° on change le rapport des vitesses en substituant à l'une des petites poulies d'autres de différens diamètres; 4° enfin, en croisant ou décroisant l'un des cordons, on obtient deux mouvemens en sens contraires ou dans le même sens.

Passons maintenant à quelques détails nouveaux sur le phénomène en question : Lorsque la vitesse de l'une des courbes n'est pas un multiple de celle de l'autre, elles ne se retrouvent plus toutes deux dans les mêmes positions après une révolution de la plus lente, de sorte qu'il se produit une image différente à chacune de ces révolutions, et que l'œil, au lieu d'apercevoir l'apparence d'une ligne fixe, ne peut voir qu'une succession rapide de lignes différentes; cependant, si la plus grande vitesse ne s'éloigne que très-peu d'un multiple de la plus petite, la différence entre deux images consécutives sera très-peu considérable, de sorte que l'œil ne pourra les distinguer l'une de l'autre, et que le spectre produit paraîtra changer peu à peu de forme pour passer par tous les cas divers qui peuvent résulter de la différence des positions initiales. Ce n'est pas une des particularités les moins curieuses du phénomène que de nous faire, pour ainsi dire, assister à ces passages entre des courbes qui n'offrent souvent aucune ressemblance, passages que l'on peut produire et ralentir à son gré au moyen du petit appareil que je viens de décrire. En effet, en avançant ou reculant d'une petite quantité l'un des supports, on augmente ou diminue la tension du cordon correspondant, ce qui en modifie un peu l'épaisseur, et de là résulte un petit changement dans le rapport des deux vitesses dont la plus grande cesse d'être un multiple de la plus petite.

Il résulte de l'explication que j'ai donnée du phénomène (*Corresp. math. et phys.*, tom IV, pag. 395.) que les images curvilignes se produiraient encore si la courbe la plus rap-

prochée du spectateur, au lieu d'être brillante, était noire: car alors, pour tous les points de la ligne d'intersection, cette courbe noire intercepterait la lumière venant de la courbe brillante, tandis que tous les autres points enverraient à l'œil l'impression produite par cette dernière; ceci est parfaitement d'accord avec l'expérience; les courbes fixes sont même plus distinctes par ce moyen que par le premier.

La courbe de devant peut encore être une fente percée dans un disque de papier noir, la courbe de derrière étant brillante; dans ce cas, le phénomène doit s'expliquer comme celui que décrit M. *Roget* (*Phil. trans.*, an. 1825, pag. 131), et dont j'ai parlé dans la *Correspondance*.

Ainsi nous avons trois manières distinctes de produire le phènomène; par les deux prémières, l'image est sombre sur un fond blanchâtre; par la dernière, elle est blanchâtre sur un fond noir.

On peut se donner l'image fixe et l'une des deux lignes mobiles; dans ce cas, une construction géométrique très-simple fera connaître l'autre; or, rien n'empêche de prendre pour image fixe une figure quelconque, une tête, un homme, un mot, etc. Alors la construction dont je viens de parler produira une figure difforme qui, venant à tourner en même temps que la ligne mobile que l'on s'était donnée, fera naître une image parfaitement régulière.

Voilà donc une espèce nouvelle d'anamorphoses; pour qu'elles réussissent complétement, il faut que la figure difforme soit noire, et tourne devant une ligne blanche, ou qu'elle soit blanche et tourne derrière une fente percée dans un disque noir. Cette dernière méthode est préférable à l'autre, parce qu'elle permet de donner à l'image beaucoup de vivacité. A cet effet, on dessine la figure difforme sur un papier blanc transparent, et on peint l'espace environnant avec un noir très-opaque; alors on fait l'expérience le soir, en plaçant une forte lumière derrière le papier.

Pour donner un exemple de ces anamorphoses, supposons: 1° que la fente qui tourne devant la figure difforme soit une ligne

droite passant par son centre de mouvement; 2° que les deux centres de mouvement soient superposés; 3° que les vitesses soient en sens contraires; 4° enfin, que la vitesse de la figure difforme soit double de celle de la fente. Dans ces circonstances, le dessin bizarre, représenté figure 2, produira l'image régulière représentée figure 3.

La construction de ces figures difformes est très-simple: j'en donnerai ici le procédé et la démonstration, pour le cas dont je viens de parler, on l'étendra ensuite sans peine à tous les autres. Considérons pour cela la fente dans l'une quelconque de ses positions, et nommons α l'espace angulaire qu'elle a décrit à partir de sa position initiale. La série des points de la figure difforme, qui étaient visibles à travers la fente dans cette position initiale, se sera maintenant éloignée de cette même position, et dans le sens opposé, d'un espace angulaire représenté par 2α; car leur vitesse est supposée double de celle de la fente et en sens contraire: ainsi ces points et cette fente seront maintenant écartés d'un espace égal à 3α. Or, puisque l'image régulière se compose des intersections successives de la fente et de la figure difforme, il est aisé de conclure de ce qui précède que deux points qui, dans l'image régulière doivent être séparés par une distance angulaire α, correspondent dans la figure difforme à deux points éloignés d'une distance angulaires 3α, et qu'ainsi, après avoir dessiné sur un cercle de papier la figure régulière que l'on veut produire, on construira la figure difforme correspondante en triplant les distances angulaires de tous les points de la première, sans altérer leurs distances au centre du cercle.

Dans le cas dont il s'agit, il se produira à la fois trois images régulières, situées symétriquement autour du centre de mouvement. En effet, d'après les observations ci-dessus, il est aisé de voir que, lorsque la fente aura fait le tiers d'une révolution, tous les points du cercle qui porte la figure difforme se seront présentés derrière elle, et que, par conséquent, il se sera produit une image régulière complète; donc, pendant le second et le troisième tiers de la révolution de la fente,

il devra se former une seconde et une troisième image semblables à la première.

On voit aussi que la figure difforme le sera d'autant plus qu'il y aura plus de différence entre les deux vitesses, et qu'ainsi on est maître de rendre ces figures aussi irrégulières, aussi bizarres que l'on veut.

Liége, le 5 décembre 1829.

Notes extraites d'un voyage scientifique, fait en Allemagne pendant l'été de 1829; par A. QUETELET.

Ier ARTICLE.

Observatoires d'Altona et de Hambourg.

Mon principal but, en entreprenant un voyage scientifique en Allemagne, ayant été de visiter les observatoires les plus remarquables, et de me mettre au courant de l'état de l'astronomie dans ce pays si curieux à tant d'égards, j'ai dû donner naturellement la préférence à la partie septentrionale, tout en regrettant néanmoins, que le temps dont je pouvais disposer, ne m'ait pas permis de visiter Vienne et particulièrement Munich. Je dois regretter également de n'avoir pu prolonger mon voyage jusqu'à l'observatoire de Kœnigsberg, si célèbre par les travaux de *Bessel*, l'un des plus grands astronomes du siècle. Si quelque chose cependant peut me consoler de pareilles privations, c'est le souvenir des choses intéressantes que j'ai vues dans les différentes villes que j'ai parcourues, et l'accueil plein de bienveillance que j'ai reçu des savans que j'ai eu le bonheur d'y rencontrer. Je me propose de présenter ici quelques notes que j'ai recueillies au milieu de mes courses, en ne m'assujettissant à aucun autre ordre, qu'à celui des dates.

J'ai quitté Bruxelles au commencement de juillet dernier;

en me dirigeant vers Hambourg, j'ai choisi la route par Amsterdam, comme étant à la fois la plus commode et celle qui offre le plus d'intérêt au voyageur. On peut la regarder aussi comme la plus courte, relativement au temps, puisque 24 heures suffisent pour se transporter de Bruxelles à Amsterdam, et que le bateau à vapeur fait habituellement le trajet de cette dernière ville à Hambourg, dans l'espace de 36 heures. Comme du reste, j'étais charmé de revoir encore les principales villes de notre royaume, j'ai fait successivement des stations à Anvers, Rotterdam, La Haye, Leyde et Amsterdam. Je ne m'arrêterai point à communiquer les notes que j'ai recueillies dans ces villes; je me hâte de franchir nos frontières, et de rapporter conformément au but de mon voyage, ce que j'ai vu chez nos voisins.

Le bateau à vapeur sur lequel je m'embarquai, partit d'Amsterdam dans la nuit du 11 au 12 juillet. Nous laissâmes derrière nous les îles qui forment la barrière du Zuiderzée, avant la nuit suivante; et le deuxième jour, de grand matin, nous passâmes devant l'île d'Helgoland qui est un point remarquable de la mer du Nord, où M. le professeur *Schumacher* établit un observatoire pendant l'été de 1824, afin de déterminer la longitude du lieu par des observations comparées de chronomètres. Ces observations se faisaient en même temps à l'observatoire d'Altona et à Helgoland, par M. *Schumacher* et par son assistant M. *Hansen*, actuellement directeur de l'observatoire de Gotha; le Journal en a été imprimé en 1825, et il a été dédié par M. *Schumacher*, au bureau des longitudes de Londres. (In-4°, chez *Langhoff*).

Après 34 heures environ de traversée, nous arrivâmes à Hambourg dans la matinée du lundi 13 juillet. En dirigeant mon voyage par cette ville, j'avais surtout en vue de visiter l'observatoire d'Altona, qui se trouve dans le voisinage; j'eus tout lieu de me féliciter de cette résolution. M. *Schumacher*, directeur de l'observatoire, que je n'avais l'honneur de connaître que par ses travaux scientifiques et par l'excellent journal qu'il publie depuis 1823, sous le titre d'*Astronomische-*

Nachrichten, m'accueillit de la manière la plus amicale, et voulut bien m'engager à passer quelques jours chez lui : j'acceptai avec reconnaissance cette invitation qui me rapprochait d'un des hommes que je désirais le plus connaître.

Altona, qui fait partie de la frontière du Danemarck, se présente presqu'au sortir des portes de Hambourg; quelques personnes pensent même que c'est de là que cette ville tire son nom (*al te na*, trop voisine). Elle se trouve comme Hambourg, bâtie sur la rive droite de l'Elbe, mais sa position est en général plus pittoresque, parce qu'elle se trouve sur une hauteur et qu'une partie de ses rues descend en pente jusqu'au bord de l'Elbe. C'est sur cette pente que se trouve l'observatoire; sa construction n'est point ancienne et ne remonte qu'à l'année 1823. Cet édifice a été bâti sous la direction de M. *Schumacher*, qui se félicite de plusieurs idées heureuses qui lui ont été suggérées par M. l'architecte *Kessels*, soit pour le mécanisme des trapes, soit pour la construction des massifs destinés à porter les instrumens; son élévation au-dessus des eaux moyennes de l'Elbe, est d'environ 60 pieds. Cet édifice est bien moins remarquable par ses dimensions que par les soins extrêmes qui ont été pris pour en assurer la stabilité, pour protéger les instrumens et pour faciliter l'observation. J'en présente ici deux dessins qui pourront donner une idée de la disposition intérieure, pl. II; ils sont faits d'après des planches plus détaillées que je dois à l'obligeance de M. *Schumacher*, qui se propose de les publier plus tard, en y joignant un texte explicatif.

On voit dans le premier dessin, le plan de l'observatoire; et dans le second, une coupe verticale du même édifice, faite perpendiculairement au méridien; toutes les parties sont réduites dans le rapport de $^1/_{96}$ de leur grandeur véritable. La salle d'observation est à peu près de forme carrée; on y pénètre par un petit vestibule, et l'on a sur la droite en entrant, l'escalier qui mène vers la tourelle située à l'angle sud-ouest.

Les massifs pour la pendule et l'instrument méridien, sont construits en briques; on a pratiqué dans le plus grand, des ouvertures pour faciliter le séchement; l'on a pris la même

précaution à l'égard du cône en maçonnerie établi dans la tourelle, comme on peut le voir sur le dessin; les murs extérieurs sont également doubles, pour empêcher l'action de l'humidité, et se trouvent liés entre eux par les extrémités et par des briques placées de distance en distance; enfin, pour plus de précaution, devant les murs est placée une tenture de serge verte qui sert en même temps d'ornement aux chambres dans lesquelles on observe. Les pieds des massifs sont entièrement libres, de sorte qu'en descendant dans les caves, on peut les inspecter à tout instant; les fondemens n'avancent en terre que de deux à trois pieds, ces massifs n'ont du reste aucune liaison avec le plancher sur lequel se trouve l'observateur.

L'instrument principal est une lunette méridienne de *Reichenbach*, qui a cinq pieds de foyer avec une ouverture de 4 pouces; l'observation ordinaire se fait avec un grossissement de 192 fois. L'axe porte un cercle de trois pieds pour prendre la déclinaison des astres; on y lit, au moyen du vernier, les divisions de 2 en 2 secondes. L'oculaire porte onze fils alternativement gros et fins et placés à 10 secondes de distance environ, estimées selon l'équateur; quand la lunette est verticale, l'oculaire se trouve élevé d'environ trois pieds au-dessus du sol.

L'instrument est muni de contrepoids : les divisions sont faites sur argent et couvertes d'un vernis (naphte et copale). La concentricité des cercles permet l'application de ce vernis qu'enlèveraient les verniers ordinaires qui frottent plus ou moins contre le limbe gradué. Un écran glisse le long des ouvertures méridiennes pour protéger l'instrument contre l'action des rayons solaires. Le toit peut glisser d'une seule pièce comme l'indique le dessin, et découvrir les ouvertures après qu'on a abaissé par un mécanisme ingénieux, la gouttière où tombe l'eau qui pénètre par les interstices où se fait la jonction.

Comme l'observatoire se trouve sur la pente de la colline qui descend vers l'Elbe, et que des bâtimens placés dans la direction du méridien, ont empêché l'établissement de mires vers le nord et vers le sud, il a fallu recourir à des moyens

particuliers pour la vérification de l'instrument méridien; cette vérification se fait, d'après les principes de la méthode de M. *Gauss*, par une petite lunette placée à environ 30 pieds, et disposée de manière que les rayons parallèles sortant des deux lunettes doivent coïncider en direction; du reste, il n'est pas même nécessaire que la lunette servant de mire soit dans le plan du méridien, il suffit de connaître l'angle que les rayons parallèles font avec le méridien, et cette erreur constante qui affecte toutes les observations, peut se calculer avec une précision indéfinie par des répétitions. En combinant les observations faites d'un côté avec celles qu'on fait au cercle tourné de l'autre côté, on trouve le moyen de déterminer l'axe optique plus facilement que par un seul retournement. Depuis deux ans que la mire est placée, le séchement du massif a dû déranger un peu la lunette, mais d'une valeur qui ne dépasse pas une demi-seconde, et la déviation a subi une augmentation à peu près régulière. Voici les nombres que M. *Schumacher* a bien voulu me communiquer.

ÉPOQUES DES OBSERVATIONS.		NOMBRES D'OBSERV.	AZIMUTH DES MIRES.
du 15 mai	au 4 juin (1828). . .	8 Est.	0″,410
5 juin	18 »	12 Ouest	0, 401
19 »	30 »	13 E.	0, 393
2 juillet	14 juillet.	14 E.	0, 486
16 »	4 août	13 E.	0, 474
4 août	20 »	9 O.	0, 499
25 »	28 »	6 E.	0, 517
30 »	11 septembre . . .	12 O.	0, 509
14 septem.	26 »	9 E.	0, 505
27 »	25 octobre	10 E.	0, 467
29 octobre	24 novembre . . .	7 O.	0, 233

On a placé un nouveau réticule, et par le changement de l'axe optique, on a obtenu :

ÉPOQUES DES OBSERVATIONS.		NOMBRES D'OBSERV.	AZIMUTH DES MIRES.
du 9 févr. au 18	fév. (1829). . .	3 Ouest	0″,320
23 »	23 mars	12 Est	0, 388
24 mai	26 avril	10 O.	0, 387
26 avril	26 mai	14 O.	0, 443
27 mai	9 juin	7 E.	0, 461
9 juin	22 juin	6 O.	0, 478
23 juin	24 juillet.	9 E.	0, 488

M. *Schumacher* estime qu'il est avantageux de rapprocher le plus possible la mire de l'instrument méridien pour écarter les effets des réfractions. La petite lunette qui sert de mire, est fixée sur un massif en maçonnerie et abritée des injures de l'air par un petit toit en bois; sur le devant est placée l'ouverture par laquelle sortent les rayons lumineux parallèles, ces rayons sont émis primitivement par une lampe munie d'un réflecteur et placée derrière la lunette qu'ils traversent en prenant des directions parallèles.

Pour opérer le retournement de la lunette méridienne, M. *Schumacher* emploie un pied porté sur quatre roulettes qui glissent sur deux barreaux de fer placés à terre, et parallélement au méridien, afin de faire avancer la machine sans déviation. A la partie supérieure du pied, se trouve une traverse en fer qui se soulève lentement par une vis appropriée à cet usage, et qui reçoit sur deux demi-anneaux placés à ses extrémités la lunette qu'elle emporte de ses points d'appui. On fait reculer alors le pied pour opérer le retournement de la lunette; puis on l'avance de nouveau entre les deux massifs, pour redescendre l'instrument à sa place.

La pendule qui se trouve sur un massif particulier, comme je l'ai déjà dit précédemment, a été construite par *Jurgensen;* elle est placée derrière l'observateur un peu vers la gauche, quand celui-ci observe du côté du midi.

Le pilier placé sous le toit mobile de la tourelle, est un

théodolite de *Reichenbach*. Du reste, il n'est pas à demeure fixe et peut être remplacé par un autre instrument. Le toit est de forme conique ; il n'a qu'une ouverture ; elle dépasse le zénith. Il y a aussi des fenêtres latérales dirigées vers l'est, l'ouest et le sud ; la porte est au nord.

Outre les instrumens placés dans l'observatoire, M. *Schumacher* possède encore une collection magnifique de théodolites et d'autres instrumens astronomiques du plus grand prix. Ce savant observateur possède également une dixaine de chronomètres des meilleurs artistes, dont il a eu successivement occasion de faire usage dans différentes recherches, soit pour déterminer les longitudes de quelques lieux particuliers, soit pour la triangulation du Danemarck, qui se fait sous sa direction. J'ai vu égalcment à Altona, avec un intérêt bien vif, une riche collection d'instrumens météorologiques de toute espèce.

Je ne dois pas omettre de parler d'un horizon artificiel très-commode, qui pourrait ne pas être connu encore par quelques astronomes ; il consiste tout simplement en une capsule en cuivre, de forme sphérique et très-évasée, sur laquelle on a fait mordre d'abord l'acide nitrique. On y met ensuite le mercure, de manière que ce liquide n'ait pas trop de profondeur. Le mercure alors, par l'adhésion qu'il contracte avec le métal, est moins disposé à se répandre et reprend rapidement son état d'équilibre.

M. *Schumacher* jouit auprès de son gouvernement d'une confiance qu'il justifie autant par ses travaux que par la noblesse de son caractère. Les opérations de la triangulation du Danemarck, se font sous son inspection ; on lui accorde aussi la plus grande latitude, soit pour l'acquisition de nouveaux instrumens qu'il juge nécessaires, soit pour la nomination de son assistant, de son mécanicien ou d'autres personnes qu'il croirait devoir employer. Aussi son choix s'est constamment porté sur des hommes habiles. M. *Hansen* qui dirige actuellement l'observatoire de Gotha, et M. *Clausen* qui remplace à Munich M. *Fraunhofer*, sont sortis de l'observatoire d'Al-

tona ; M. *Petersen* marche aujourd'hui dignement sur les traces de ses prédécesseurs.

Parmi les hommes remarquables dont j'ai eu occasion de faire la connaissance chez M. *Schumacher*, je ne dois pas omettre de citer notre compatriote M. *Kessels*, de Maestricht, frère de l'architecte et du statuaire de même nom. M. *Kessels*, après s'être distingué pendant plusieurs années dans les ateliers de M. *Breguet*, à Paris, et avoir séjourné en Angleterre, est venu offrir ses services au gouvernement de son pays, et a passé ensuite à Altona, où il s'est trouvé retenu par les avantages qu'il y a rencontrés, et par la bienveillance du monarque qui l'a décoré de l'un de ses ordres. Ses pendules et ses chronomètres jouissent d'une grande réputation ; il a déjà construit plusieurs de ces instrumens pour la marine et pour des observatoires, parmi lesquels je citerai ceux d'Altona, de Kœnigsberg, de Florence.

J'ai profité de mon séjour à Altona, pour faire des observations sur l'intensité magnétique avec un petit instrument, déjà observé à Bruxelles, et que j'avais fait construire dans cette ville sur le modèle de celui que M. le capitaine *Sabine* tient de M. *Hansteen*. Mes observations ont eu lieu dans le jardin de M. *Schumacher*, au lieu même où les deux savans que je viens de nommer, ont également fait leurs observations. Cette station devenait importante pour établir des comparaisons entre les résultats obtenus pour d'autres lieux, et en particulier pour Bruxelles, où M. *Sabine* m'avait fait l'amitié d'observer ses aiguilles quelques mois auparavant. Comme mes observations font partie d'un autre travail, je me dispenserai de les consigner ici. (*Voyez* le cahier précédent de la *Correspondance*, pag. 66.)

Depuis quelques années, on a construit, à Hambourg, aux frais de la ville, un observatoire dont la direction a été confiée à M. *Repsold*, qui s'est acquis une juste célébrité par la construction de ses instrumens astronomiques. Le nouvel édifice est situé près de la porte qui conduit de Hambourg à Altona, et sur l'emplacement des vieux remparts qui, depuis les

dernières guerres, ont été nivelés et convertis en promenades. Cette situation est avantageuse ; l'horizon vers le nord est entièrement libre, et vers le sud, on ne perd que 1 à 2 degrés. Par les plans ci-joints, on pourra se faire une idée de l'édifice qui ressemble beaucoup à celui de Bruxelles, quoique sur une moindre échelle (*). Il se compose de deux pavillons et d'une partie moyenne où sont les instrumens fixes. Dans la partie orientale, tournée du côté de la ville, se trouve l'école de navigation, qui n'a aucune communication avec le reste de l'édifice ; dans la partie opposée est l'habitation de l'astronome. Au centre de ce pavillon s'élève un pilier creux en maçonnerie, de forme conique, et d'environ 30 pieds de hauteur. Il est destiné à porter un instrument parallactique, pour observer le ciel dans toutes les directions ; on y a déposé, en attendant, un héliomètre de *fraunhofer*. Ce pilier est entièrement indépendant du reste de l'édifice, et s'élève jusque sous un toit mobile ; les escaliers qui l'entourent n'ont aucune liaison avec lui.

Les fondemens des piliers pour les instrumens fixes, pour les pendules et pour le pilier conique, descendent à 8 pieds dans le sol. Leur construction est massive et séparée du reste du bâtiment, par une distance assez grande pour éviter toute secousse extérieure. L'observatoire est garanti avec soin au midi de l'influence des rayons solaires.

La partie moyenne de l'édifice se compose de deux chambres, dans chacune desquelles est pratiquée une coupe méridienne pour les instrumeus fixes. L'un de ces instrumens, la lunette méridienne, qui est construite par M. *Repsold* lui-même, a 6 pieds de longueur, avec un objectif de 4 pouces de diamètre, construit par *Fraunhofer*. Les piliers sont en briques, et maçonnés sur le même principe que ceux de l'observatoire d'Altona. L'oculaire est muni de deux cercles pour chercher les astres dans le méridien. Le champ de la lunette est divisé par sept fils : deux fils mobiles et placés à distance constante sont

(*) Voyez l'Annuaire de *Bode*, pour 1826.

mis en mouvement par une vis micrométrique. Une mire a été placée dans le lointain pour la vérification de l'instrument.

M. *Repsold* se propose de construire un cercle méridien, qui sera placé dans la salle voisine. Cet habile mécanicien, dont les ouvrages sont malheureusement trop peu nombreux et trop peu connus chez les étrangers, s'occupe en ce moment de la construction d'une lunette méridienne pour l'observatoire d'Édimbourg. J'ai vu encore dans les ateliers qu'il possède en ville, différens instrumens d'astronomie et de physique, qui donnent la plus haute idée de la précision qu'il est parvenu à atteindre. Les expériences qu'il a faites sur la dilatation et la flexion des métaux sont très-curieuses. Ainsi il rend très-sensible la flexion que la plus légère pression du doigt fait éprouver à un barreau de fer d'environ 7 à 8 centimètres d'écarrissage sur une longueur d'un demi-mètre. J'ai vu un cylindre de platine d'un peu moins d'un pouce de diamètre, tourné avec tant de soin et s'adaptant si parfaitement dans un cylindre creux de même métal, qui avait une assez grande épaisseur, qu'il suffisait d'une pression modérée avec les doigts pour empêcher l'un de ces cylindres de glisser dans l'autre, quoique ce glissement pût se faire de la manière la plus facile, quand on éloignait la pression. Ses différentes expériences l'ont conduit à regarder comme peu sûr l'emploi des instrumens de très-grande dimension.

En visitant l'observatoire de Hambourg, j'ai vu la belle machine à diviser de M. *Repsold*, ainsi que le pendule du même artiste, avec lequel M. *Bessel* vient de faire les belles observations dont il a consigné les résultats dans les mémoires de Berlin, pour 1828. (*Untersuchungen über die länge des einfachen secunden pendels.*)

Excursion à Brême; M. le Docteur Olbers.

En quittant Altona et Hambourg, je songeai à me diriger vers Brême, pour visiter l'illustre *Olbers*. Je fus assez heureux pour faire ce voyage avec MM. *Schumacher* et *Repsold*,

qui me donnèrent encore dans cette circonstance des preuves d'une bonté et d'une complaisance dont le souvenir me sera toujours précieux. Je me présentai donc, sous les auspices de ces deux hommes distingués, chez le grand astronome, à qui l'on doit la découverte de *pallas* et de *vesta*, ainsi qu'une foule d'autres travaux qui ont enrichi la science. J'aurais peine à exprimer le respect que j'éprouvai en approchant de ce beau vieillard, dont la physionomie, pleine de noblesse, respire en même temps la bonté et la plus touchante bienveillance. Mais mon émotion fut plus vive encore quand j'entrai dans le modeste observatoire, où avaient été faites tant de belles recherches ; c'était une chambre élevée de médiocre grandeur, qui servait en même temps d'observatoire et de bibliothéque. Les murs étaient garnis de livres, et le fond présentait une espèce de vitrine en saillie vers le jardin, d'où l'on découvrait une grande partie du ciel. Je témoignai le désir de voir l'instrument qui avait servi à la découverte des deux planètes qui ont illustré le commencement de ce siècle. Le voici, me dit le célèbre vieillard, en remettant entre mes mains un chercheur dont l'objectif était cassé. La pendule qui avait assisté à ces grandes découvertes était encore là ; elle était simple comme l'autre instrument; elle n'était pas même pourvue de compensation. Quoique M. *Olbers* ait acquis depuis des instrumens beaucoup plus parfaits, et entre autres plusieurs lunettes de Munich, on voyait sans peine qu'il était demeuré attaché aux premiers, comme à de vieux amis qui ont partagé de grands travaux, et qu'on conserve avec amour. Les recherches de M. *Olbers* ne nécessitaient point des instrumens d'une grande précision, sans doute ; cependant, on ne peut s'empêcher d'admirer l'adresse avec laquelle il a su tirer parti de ceux qu'il avait en sa possesion. On sait du reste que le propre du génie est de produire de grands résultats avec de faibles moyens.

Il n'est peut-être pas d'astronome qui ait une connaissance plus approfondie du ciel que M. *Olbers*. En lui montrant seulement la partie du ciel qu'embrasse le champ de son cher-

cheur, il n'aurait guère de peine à reconnaître les étoiles qui s'y trouvent.

Il s'exprime avec autant de candeur que de modestie sur l'objet de ses recherches. « Pour *pallas*, disait-il, je l'ai vue par hasard ; mais j'ai cherché *vesta* ; aussi sa découverte m'a causé une bien douce satisfaction. » Je ne sais si j'admirai dans M. *Olbers* ses talens plus que ses vertus ; mais il me semble qu'il est impossible d'approcher de lui sans éprouver le plus profond respect, alors même qu'on ignorerait ses belles découvertes. J'ai eu le bonheur de me trouver au milieu de sa famille et de ses amis, et le même sentiment dominait chez tous et se montrait dans tous les regards. C'était un vrai patriarche, objet de l'amour et de la vénération de tous ceux qui l'entouraient.

Je restai peu de temps à Brême, je puis dire même que je n'y vis que M. *Olbers*. Je repartis avec MM. *Schumacher* et *Repsold* le surlendemain de notre arrivée. Quoique notre départ eût lieu de grand matin, je fis encore quelques observations sur l'intensité magnétique pour confirmer celles que j'avais obtenues la veille dans un petit jardin attenant à la demeure de M. *Olbers*. Mes résultats se trouvèrent d'accord ; et j'y attache assez d'importance, parce que je ne crois pas que l'intensité magnétique ait encore été observée à Brême.

C'est à Lilienthal, près de Brême, que se trouvait l'observatoire de l'astronome *Schrœter*, dont les instrumens ont été transportés depuis à Gœtingue. On trouve une description de cet observatoire dans l'*Annuaire de Bode* pour 1788.

Voyage à Berlin ; Observatoire et autres Établissemens scientifiques de cette capitale.

Je fus de retour à Altona le 28 juillet, et j'en partis le lendemain soir pour Berlin ; la route entre ces deux villes est loin d'être commode, et exigerait de promptes réparations. Quand on voyage en Prusse, et qu'on se sert des voitures publiques, on n'a guère de choix à faire ; la poste, exploitée par le gou-

vernement, est à peu près l'unique moyen de communication; encore ne part-elle pas tous les jours, même des grandes villes telles que Hambourg. Les bagages sont déposés sur des voitures particulières, qui partent avant celles où sont les voyageurs (*schnell-post*), et qui arrivent presqu'en même temps qu'elles; mais si les effets n'ont pas été déposés avec les formalités voulues, plusieurs heures à l'avance, ils ne partent qu'avec la prochaine expédition qui souvent n'a lieu que plusieurs jours après. Du reste, pour être juste, il faut convenir que les voitures, destinées aux voyageurs, sont en général très-commodes, et que le service est régulier.

La ville de Berlin devait m'intéresser sous plusieurs rapports, et je conviens que ce que j'y ai vu, a dépassé en général mon attente. Peu de villes offrent une aussi brillante réunion d'hommes instruits dans les différentes branches des connaissances humaines. L'université de Berlin est actuellement une des plus florissantes de l'Allemagne; elle compte de 16 à 1700 étudians; les professeurs y sont également très-nombreux, ce qui fait que souvent plusieurs cours peuvent y être donnés en même temps sur une même matière, et cette espèce de concurrence est tout à l'avantage des études. Les jeunes gens, au sortir des colléges, subissent un examen qui prouve qu'ils sont en état de fréquenter les universités; ils peuvent alors se rendre indifféremment à Bonn, Breslau, Berlin, Halle ou Kœnigsberg. Les cinq universités établies dans ces villes suffisent aux besoins de la Prusse, quoique sa population soit double de la nôtre, et que l'on compte près de 250 lieues de Bonn à Kœnigsberg.

Indépendamment de son université et de ses colléges, Berlin renferme encore un grand nombre d'autres établissemens pour l'instruction, tels qu'un institut des sourds et muets, un institut des aveugles, une école militaire, une école royale d'artillerie et du génie, un institut royal militaire d'équitation, un institut pour la médecine et la chirurgie militaire, etc.; mais ce qui mérite particulièrement de fixer l'attention, c'est ce qui a été fait en faveur de la classe industrielle. Le premier établis-

sement de ce genre, est celui qui a été fondé par l'état, sous le nom de *Gewerb-institut*. Les 25 districts de la Prusse, y envoient chacun un élève après lui avoir fait sublir un examen sur les principes des langues et des sciences. Les jeunes gens y sont externes et reçoivent de l'état 300 thalers (environ 1200 francs). En entrant, ils subissent un second examen, pour qu'on puisse fixer leur rang. Le séjour est de trois ans; ils ont trois heures de dessin le matin, et l'après-midi est consacrée à l'étude des sciences et des arts mécaniques. On se plaignait de ce que les lettres, la géographie et la musique, étaient trop négligées. Quoique cette école ait produit de bons résultats, on a senti le besoin d'y introduire une réforme; on s'en occupait pendant mon séjour à Berlin, et l'on faisait en même temps des réparations au bâtiment, ce qui m'a empêché de pouvoir le visiter. Il paraît que les réformes se feront en grande partie d'après les plans de la nouvelle *école centrale des arts et métiers*, que l'on vient d'établir à Paris.

La ville de Berlin a ouvert de son côté, une école aux artisans (*Berlinische gewerbeschule*), dans laquelle on enseigne les principes des sciences et des arts. L'école réelle (*die Realschule*), est aussi destinée aux jeunes gens qui se destinent au commerce, ainsi qu'à l'étude des arts libéraux ou mécaniques. Enfin, on compte encore le (*Réal-gymnasium*), espèce d'établissement mixte, où l'on enseigne les langues anciennes et ce qui se rapporte aux arts et à l'industrie. Il ne semble pas jouir d'une existence bien sûre; il subsiste aux frais de la ville, qui voudrait en exclure le latin malgré l'opposition du gouvernement.

Il existe à Berlin une société pour l'instruction élémentaire (*Schullehrerverein für deutscher volksschulwesen*), qui a pour but, comme plusieurs sociétés de notre royaume, de perfectionner et de propager les méthodes d'enseignement, de publier des livres élémentaires pour l'instruction, etc. On doit aussi à des personnes charitables, la fondation des écoles d'industrie (*Erwerbsschulen*), dans lesquelles les enfans pauvres, de 7 à 14 ans, reçoivent gratuitement l'instruction et sont occupés encore de travaux mécaniques. On vend le produit de

leur industrie et on leur accorde un salaire sur le prix qu'on en retire.

On voit que les moyens d'instruction sont loin de manquer à Berlin; il existe surtout des ressources immenses pour le haut enseignement, soit dans les vastes hôpitaux, soit dans les collections de l'Université et dans les riches Musées, que l'on doit à la munificence du roi, soit dans les différentes bibliothéques et particulièrement dans la bibliothéque royale, l'une des plus belles qui existent; on y trouve un cabinet de de lecture qui renferme une collection presque complète de tous les journaux scientifiques et littéraires de l'Europe. Qu'on ajoute à tous ces moyens d'instruction, la faculté qu'a chacun dans sa partie de pouvoir entendre et consulter des savans dont les noms sont à juste titre devenus européens, et l'on appréciera facilement la place brillante que cette belle ville, si riche déjà par ses souvenirs et par ce qu'elle possède, est appelée à prendre dans le monde savant.

L'observatoire, achevé en 1711, n'est guère en état de soutenir aujourd'hui l'astronomie à la hauteur où les autres sciences se trouvent portées à Berlin; c'est une grande tour carrée, placée vers la partie septentrionale de la ville et derrière le bâtiment qu'occupe l'Académie royale des sciences. Aussi l'on se propose de construire un nouvel observatoire plus commode et mieux approprié aux besoins de l'astronomie moderne.

L'ancien observatoire a été bâti par l'architecte *Grünberg* (*).

(*) « *Godefroi Kirck*, qui s'était fait connaître avantageusement parmi les astronomes, par des éphémérides annuelles et par diverses observations, avait été appelé à Berlin dès 1700, en qualité d'astronome royal; mais il ne put avoir la satisfaction de prendre possession de cet observatoire. Il mourut en 1710, et fut remplacé par *Hoffmann* qui, étant mort lui-même en 1715, eut pour successeur dans la direction de l'observatoire, *Christian Kirck*, qui remplit cette place jusqu'en 1740. On a de lui diverses observations utiles dans les *miscellanea Berolinensia*. Son successeur fut *Wagner*, dont je ne trouve plus de trace au delà de 1744. Le grand *Frédéric* ayant renouvelé l'Académie en 1745, on recommença à y obser-

La construction de cet édifice dura plusieurs années; la hauteur est de 84 pieds, et le carré qui sert de base, a 43 pieds de côté; on compte jusqu'à cinq étages. On peut placer des instrumens sur la platte-forme qui sert de toit, et observer à l'horizon vers les différens points du ciel. La salle d'observation était d'abord au troisième étage; mais la construction de plusieurs maisons élevées du voisinage et l'emploi des instrumens nouveaux, fit sentir la nécessité de s'élever davantage et de pratiquer dans le toit des coupes qui missent le méridien à découvert. L'astronome *Bode*, fit à cet égard une proposition à son gouvernement en 1798; et les changemens qu'il avait proposés furent exécutés deux ans après. Le plan ci-joint, tiré de l'annuaire de *Bode*, pour 1804, pourra donner une idée de de la disposition actuelle de l'observatoire. La salle de forme ovale *a*ABc, est située vers le sud et communique au nord avec la chambre FLHG. La hauteur de ces salles, qui sont formées des deux derniers étages de l'édifice primitif, est de 23 pieds, et la largeur *ac* est de 40 pieds. On trouve de plus des deux côtés, une petite chambre *i*, deux cabinets *k*, *l*, et l'escalier pratiqué en *h*, le petit escalier *m* conduit à deux cabinets au-dessus de *i* et *k*; il se trouve aussi un cabinet au-dessus de *l*. La lunette méridienne est placée devant la fenêtre

---

ver plus assidûment par les soins de *Grischow* et *Kies*. Le citoyen *De La Lande* en fut chargé en 1751 et 1752, et il y fit élever des pierres énormes pour placer des muraux au nord et au midi. En 1755, M. *Hubert* en fut chargé; il se retira en 1758. M. *Bernouilli* lui succéda; c'est actuellement M. *Bode* à qui l'on doit les éphémérides qui se publient annuellement et depuis 1776, sous le titre d'*Astronomisches Jahrbuch*, et qui sont enrichies chaque année de mémoires et d'observations de divers astronomes. A l'égard de M. *Bernouilli*, nous lui devons le journal astronomique, sous le titre de *Recueil des astronomes*, avec des supplémens sous celui de *Nouvelles littéraires de divers endroits*, de 1771 à 1779, et des lettres astronomiques qui ont pour objet de faire connaître l'état de l'astronomie pratique dans les parties de l'Europe, etc. » Montucla, IV[e] vol. *Hist. des math.*, pag. 354.

du milieu *x*. On a pratiqué une coupe méridienne qui se prolonge au-delà du zénith à 3 degrés vers le nord, et qui en reprenant plus loin, redescend vers *f* et permet d'observer avec l'instrument en *x* les astres jusqu'à 71° de hauteur vers le nord. Perpendiculairement au-dessus de *z* se trouve encore une ouverture qui se prolonge au nord dans le sens du méridien, afin d'observer au zénith, et de pouvoir aussi du point *x* observer les passages supérieurs de quelques étoiles circompolaires. On a établi un gnomon qui répond à la méridienne *xf*. Aux fenêtres *f*, *r*, *p*, *o*, etc., on a fixé de fortes pierres pour y placer d'une manière fixe des lunettes et d'autres instrumens portatifs. Enfin, outre la pendule placée près de la lunette méridienne, on en voit une seconde en *c*, dans le cabinet *l*.

En attendant qu'on bâtisse un nouvel observatoire, déjà des acquisitions importantes ont été faites, et nous devons particulièrement citer celle de la belle lunette parallactique de *Fraunhofer*, faite sur le modèle de l'instrument de *Dorpat*, qui sort également des ateliers de Munich. Ce bel instrument n'a pu être monté encore sur son pied, faute d'un local convenable; il se trouve déposé provisoirement dans la demeure de M. *Encke*, qui a eu l'obligeance de m'en faire voir les principales pièces. J'ai vu également entre les mains de ce savant, des oculaires qui servent à observer le soleil, et qui éteignent le trop de lumière de cet astre, d'après les principes de la polarisation, en la faisant réfléchir deux ou trois fois sur de petits miroirs dressés avec soin pour cet objet. Ces oculaires étaient construits dans les ateliers de M. *Pistor*, où l'on s'occupe en ce moment de la construction d'une lunette méridienne avec cercle pour le nouvel observatoire que l'on se propose de bâtir.

Depuis la mort de M. *Bode* qui s'est fait un nom honorable par la publication de son Annuaire et de son Atlas céleste, la direction de l'observatoire a été confiée à M. *Encke*; cet établissement ne pouvait être livré à de plus dignes mains. L'observatoire tel qu'il est à présent, contient encore plusieurs instrumens anciens et quelques instrumens modernes tels

qu'un bel héliomètre, la lunette méridienne et plusieurs lunettes. J'ai vu aussi un cercle de *Troughton*, pour lequel on a dû faire quelques dispositions particulières en *a*, mais qui a été mis en fort mauvais état lors de la prise de Berlin. Les soldats français avaient détaché le cercle et s'étaient amusés à le faire rouler comme une roue. Du reste, ces pertes pour la science sont presque inséparables des grandes commotions politiques. Quelque temps avant sa mort, M. *Burckhart* me montrait encore avec douleur les murs de son observatoire à l'école militaire, qui avaient été sillonnés par le sabre des vainqueurs lors de la prise de Paris. L'avidité avait fait croire aux soldats que ces instrumens si brillans étaient en or.

M. *Encke*, dont le nom se rattache à l'un des astres les plus remarquables qu'ait fait connaître l'astronomie moderne, travaille avec activité malgré le mauvais état de son observatoire; il a entrepris en même temps, la publication d'un Annuaire astronomique (*Astronomisches Jahrbuch*), qui fera suite à l'Annuaire de *Bode*. La meilleure idée qu'on puisse donner de cette publication, c'est de rapporter les paroles que M. *Schumacher* a insérées dans le dernier volume de ses Éphémérides (*Astronomische hülfstafeln*). « Je présente aux astronomes, dit ce savant avec autant de modestie que de délicatesse, le dernier volume de mes Tables auxiliaires, dont la publication devient désormais inutile par l'excellent Annuaire d'*Encke* » (1). De pareils témoignages honorent les sciences.

Lorsque je me trouvais à Berlin, M. *Encke* venait de recevoir du roi de Danemarck, par l'entremise de M. *Schumacher*, la décoration d'un de ses ordres; mais ses amis mêmes n'en furent instruits que par les journaux étrangers. M. *Encke*, dont la modestie est extrême, met autant de soin à cacher ces sortes de distinctions que d'autres en mettent à les faire valoir. Il est à re-

---

(*) *Ich übergebe hier dem astronomischem publicum den letzten Band diezer hülfstafeln, deren weitere fortsetzung durch* Encke *'s vortreffliches jahrbuch unnöthig wird.*

gretter que des motifs de délicatesse que nous ne pouvons qu'approuver, l'empêchent de rendre publiques les formules qu'il emploie depuis long-temps pour le calcul des astres. Si je puis en juger par ce qu'il m'a fait l'amitié de me montrer, elles doivent être d'une extrême simplicité et réduire de beaucoup les opérations numériques. Comme l'idée première de ces formules appartient à M. *Gauss*, son ancien professeur, il se borne à en faire usage pour lui-même.

L'un des étages de la tour, au haut de laquelle se trouve l'observatoire, est habité par M. *Poggendorf*, qui s'occupe avec persévérance d'observations météorologiques et de la rédaction du journal (*Annalen der physik und chimie*) auquel coopèrent les savans allemands les plus distingués. Ce recueil fait suite à celui qui a été publié depuis 1790, par *Gren* et *Gilbert*.

Berlin renferme un grand nombre de mathématiciens habiles, MM. *Stein*, *Eytelweyn*, *Diercksen* . *Magnus*, *Ideler*, *Oltmans*, *Le Jeune - Dirichlet*, *Lehmus*, *Gruson*, etc. M. *Crelle*, qui lui-même s'est fait un nom par ses ouvrages mathématiques, a rendu un véritable service aux sciences par la publication de son excellent journal. Ce recueil, qui renferme des recherches précieuses sur les différentes branches des sciences exactes, paraît par trimestre et sous format in-4°; le gouvernement, toujours prompt à favoriser les entreprises scientifiques, lui a prêté un appui qui pouvait lui être utile, vu le petit nombre de personnes qui s'occupent en général de ces sortes d'études. M. *Crelle* jouit à Berlin comme M. *Schumacher* à Altona, de toute la confiance de son gouvernement et la justifie également par ses travaux. Il publie encore un second journal pour l'architecture et les constructions, lequel étant à la portée de plus de personnes que le premier, est aussi beaucoup plus répandu. Je devais au recueil que je publie moi-même, l'honneur d'être depuis long-temps en relation avec M. *Crelle*, et ce qui pour d'autres hommes devient quelquefois une cause d'éloignement, m'a valu de sa part des procédés pleins de bienveillance et de délicatesse.

Malheureusement l'époque à laquelle j'arrivai à Berlin, était peu favorable; plusieurs savans étaient absens, et les autres s'éloignaient chaque jour. J'eus le bonheur de trouver encore M. *Mitscherlich*, que j'avais eu le plaisir de voir à Paris, et que j'avais rencontré plusieurs fois chez M. *Fresnel*, qui avait la bonté de répéter pour nous ses belles expériences sur la lumière. M. *Mitscherlich*, dont les leçons sont très-fréquentées, voulut bien me montrer son laboratoire et les appareils extrêmement simples qui lui servent pour ses expériences. Comme dans ses cours, il a dû jusqu'à présent se servir de ses propres instrumens, il a cherché autant que possible à en réduire le prix, par différentes simplifications qu'il a dû imaginer. Cet habile chimiste imprime en ce moment le texte de ses leçons, dont il a bien voulu me communiquer les premières feuilles; mais cette publication a été momentanément suspendue par un voyage qu'il fait en Italie avec MM. *H. Rose* et *Linck*, ses deux collègues à l'université.

M. le docteur *Seebeek* et M. le professeur *Ermann*, dont les travaux ont enrichi depuis long-temps la physique, voulurent bien me montrer leurs intéressantes collections. Ce dernier savant eut aussi la bonté de me conduire dans le jardin de l'hôpital français, où il a fait avec M. *Alex. De Humboldt*, des observations sur l'intensité magnétique, et où en 1826, il a trouvé l'inclinaison de 68°45′. J'y répétai avec mon appareil des observations semblables, et je les renouvelai encore avec MM. *Magnus* et *Poggendorf*, dans le jardin de M. *Mendelson-Bartholdi*, fils de l'illustre philosophe de même nom. M. *Mendelson*, dont la maison réunit une des plus agréables sociétés de Berlin, a disposé d'une partie de ses magnifiques jardins, pour la construction d'un petit pavillon où M. *Alex. De Humboldt* observait la variation diurne de l'aiguille aimantée, avant son départ pour la Russie, et où pendant l'absence de cet illustre savant, les mouvemens de l'aiguille sont également observés, à des époques désignées d'avance, par MM. *Encke*, *Magnus* et *Poggendorf*. Les observations devaient se faire simultanément à Berlin, Freyberg et Casan, le 1er octobre 1829,

à 4 heures du matin, jusqu'à minuit 2 octobre (44 heures); et le 19 décembre, à 4 heures du matin, jusqu'à minuit 20 décembre (également 44 heures).

Indépendamment des observations météorologiques que fait M. *Poggendorf*, on en recueille encore d'autres à Berlin. M. le major *Von OEsfeld*, s'occupe avec beaucoup de zèle et de connaissances de cette partie intéressante de la physique; il a fait faire sur un grand nombre de points, des observations avec des instrumens comparés, et il se propose de les publier successivement. Je dois à son obligeance un tableau gravé des observations de juin, faites à Berlin, par M. *J.-H. Mödler*. On y voit les variations du thermomètre et du baromètre indiquées par des lignes d'après les principes connus. L'état du ciel m'a paru indiqué d'une manière fort ingénieuse et qui mérite d'être suivie. Sur une bande horizontale de six millimètres de hauteur, et dont la longueur représente l'espace d'un mois, on voit des parties totalement blanches, d'autres totalement noires, d'autres enfin, couvertes de lignes verticales plus ou moins prononcées, selon que le ciel a été totalement serein, totalement couvert ou plus ou moins nuageux. La lettre R au bas de la ligne, représente par sa grandeur la pluie plus ou moins forte. Quelques autres lettres servent à des usages analogues. L'état des vents est indiqué par les lettres ordinaires pour les différens jours, au-dessous de la bande qui représente l'état du baromètre. J'ai proposé, il y a quelques années, le moyen de représenter aussi par une courbe les variations des vents comme celles du baromètre et du thermomètre. Le moyen est très-simple. Concevons une circonférence partagée en parties égales qui représentent les rhumbs des vents; et supposons qu'elle serve de base à un cylindre droit, dont la surface est partagée de la même manière par des droites parallèles. Supposons de plus qu'on fasse sur le cylindre autant de sections horizontales et équidistantes, qu'il y a de jours dans le mois, et chaque section sera une circonférence divisée comme la base, sur laquelle on indiquera la direction du vent; la ligne qui passera par ces différentes indications, sera la ligne demandée

quand on développera la surface cylindrique sur un plan.

Les observations météorologiques de M. *Mödler*, paraîtront sous les auspices de la Société géographique de Berlin. Cette société qui compte parmi ses membres, la plupart des hommes les plus instruits de la capitale, est présidée par M. *Ch. Ritter,* dont les savantes recherches ont fait faire tant de progrès à la géographie. Cet habile écrivain qui allie aux connaissances les plus profondes et les plus variées, une simplicité et une modestie extrêmes, séduit par l'élégance de son élocution et la flexibilité de son talent; les différens cours qu'il donne, sont suivis avec avidité; il paraît que le roi se fait également un plaisir de l'entendre, et qu'il n'apprécie pas moins que le public. ses intéressantes leçons.

Le roi de Prusse témoigne par ses actes, un vrai désir de répandre les lumières dans ses états; il consacre des sommes considérables à l'acquisition d'objets d'arts et de sciences, il établit l'enseignement sur le pied le plns large, encourage et récompense les hommes qui se distinguent, et si, dans des ouvrages nouveaux il remarque des idées utiles, souvent il invite l'auteur à les développer publiquement par des leçons. C'est ainsi que M. le docteur *Julius*, à qui l'on doit un ouvrage plein de recherches intéressantes sur les prisons, a été appelé de Hambourg à Berlin, pour donner un cours sur la partie qu'il a traitée avec tant de talent. Je dois à l'obligeance de ce savant statisticien, d'avoir fait la connaissance de MM. *Ritter* et *Bernauer*, directeur des prisons, et d'avoir recueilli plusieurs documens utiles sur la Prusse. M. *Julius* publie depuis cette année, un Journal sur les prisons (*Jahrbücher der straf-und besserungs anstalten*, etc.); il publie également avec M. *Gerson*, un Journal de médecine, qui paraît à Hambourg.

Parmi les personnes qui cultivent avec succès les connaissances statistiques, on remarque encore M. le docteur *Casper* et M. *Hoffman*. M. *Casper*, quoique jeune, a su se faire par l'étendue et la variété de ses connaissances, une réputation très-distinguée; il publie un Journal de médecine qui obtient

un grand succès en Allemagne, et dans lequel il consigne les observations que lui fournit sa pratique; il a livré également au public des recherches sur la statistique médicale (*Beitrage zur medicinischen statistik*, etc.). La connaissance des langues est assez générale en Allemagne; aussi l'on y connaît parfaitement ce qui se fait à l'extérieur, et l'on se trouve mieux que partout ailleurs au courant de l'état des lettres et des sciences.

M. le docteur *Hoffmann* est directeur du bureau de statistique établi à Berlin; il a sous lui deux savans, dont l'un s'occupe de ce qui concerne les individus; et l'autre, les choses; le bureau se compose encore de quelques autres employés subalternes. Les objets que ce bureau comprend dans ses attributions, ne sont pas aussi nombreux qu'on pourrait le croire; et c'est avec raison qu'on évite de surcharger les administrations locales de questions trop multipliées. Avec trop d'exigeance, on doit s'attendre à ne recevoir que des documens ramassés à la hâte, et qui ne valent pas qu'on les tire des cartons qu'ils vont encombrer. Les principaux objets dont on s'occupe, sont les divisions territoriales, la population des villes et des provinces, les naissances, les mariages, les décès, le dénombrement des animaux utiles, etc. M. *Hoffmann* a eu l'obligeance de me montrer les moyens de vérification que l'on emploie, et toutes les précautions que l'on prend pour s'assurer de l'exactitude des réponses qui sont adressées au bureau. On imprime annuellement dans les gazettes de Berlin, un extrait de ces divers documens; il a paru aussi quelques publications particulières.

(*La suite au prochain numéro.*)

Table de Mortalité pour Amsterdam (*).

AGES.	HOMMES.	FEMMES.	AGES	HOMMES.	FEMMES.	AGES.	HOMMES.	FEMMES.
	10000	10000	33	4350	5131	68	1276	2012
3 mois.	8623	8913	34	4281	5057	69	1184	1889
6 »	8020	8385	35	4202	4981	70	1093	1765
1 an.	7487	7952	36	4123	4903	71	994	1640
2	6806	7328	37	4044	4825	72	899	1511
3	6385	6936	38	3966	4748	73	809	1381
4	6152	6722	39	3890	4673	74	724	1253
5	6002	6574	40	3814	4600	75	644	1127
6	5879	6466	41	3739	4528	76	569	1004
7	5808	6399	42	3664	4456	77	498	886
8	5743	6353	43	3589	4385	78	433	775
9	5689	6305	44	3512	4314	79	372	670
10	5641	6265	45	3433	4241	80	317	572
11	5587	6226	46	3351	4167	81	266	483
12	5554	6197	47	3266	4091	82	222	402
13	5534	6173	48	3179	4013	83	182	330
14	5518	6151	49	3088	3932	84	147	267
15	5503	6130	50	2994	3847	85	118	213
16	5482	6106	51	2906	3760	86	93	168
17	5454	6079	52	2816	3672	87	73	130
18	5416	6048	53	2724	3583	88	56	101
19	5368	6012	54	2632	3494	89	44	78
20	5311	5971	55	2538	3407	90	35	61
21	5245	5924	56	2442	3324	91	27	49
22	5171	5872	57	2346	3237	92	21	40
23	5092	5816	58	2248	3146	93	17	32
24	5008	5756	59	2150	3050	94	13	25
25	4924	5692	60	2051	2948	95	10	19
26	4840	5626	61	1953	2842	96	8	14
27	4759	5558	62	1854	2731	97	7	10
28	4681	5488	63	1755	2617	98	5	7
29	4608	5418	64	1658	2500	99	4	4
30	4540	5347	65	1561	2379	100	3	2
31	4475	5275	66	1464	2258	101	2	1
32	4413	5203	67	1370	2135	102	0	0

(*) On pourra comparer cette table de M. *Lobatto* à celle qui a été calculée par M. *Verhulst*, tome III, page 105, et à celle que j'ai donnée pour Bruxelles. A. Q.

Académie Royale de Bruxelles.

Séance du 9 *janvier.* — M. l'avocat *Steur*, admis précédemment comme membre ordinaire, prend place à la séance. L'Académie reçoit l'hommage de différens livres qui lui sont adressés, ainsi que deux Mémoires manuscrits, l'un de M. *Lévy*, lecteur à l'université de Liége, *sur quelques minéraux trouvés à la Vieille-Montagne, à Moresnet, près d'Aix-la-Chapelle;* et l'autre de M. *Van Rees*, professeur à l'université de Liége, *sur la convergence des séries et des produits continus* (il sera inséré dans le numéro suivant). M. *Quetelet* lit une note sur la forme et la densité de la neige, et présente les résultats de différentes expériences qu'il a faites à cet égard. M. *De Reiffenberg* lit : 1° Une note sur des lettres d'indulgence du pape *Jules II*, inconnues aux bibliographes; 2° un Mémoire sur deux actes des ducs de Brabant *Henri II* et *Henri III*, et un extrait d'un manuscrit concernant les troubles du XVI[e] siècle.

Sur les institutions de bienfaisance dans le Royaume des Pays-Bas.

Nos institutions de bienfaisance peuvent être classées sous les trois titres suivans :

1° Institutions qui accordent des secours;

2° Institutions qui ont pour but de diminuer le nombre des pauvres;

3° Institutions qui tendent à prévenir l'indigence.

Les *institutions qui accordent des secours*, sont ou locales ou pour tout le Royaume; voici les nombres relatifs aux premières :

	INSTITUTIONS			
	pour secours à domicile.	pour distribution d'alimens.	de charité maternelle.	hospices.
Nombre des institutions. . . .	5 640	47	6	724
Individus secourus	755 621	?	1 557	41 748
Frais d'administration	716 531	2 231	14 686	951 518
Secours de toute espèce. . . .	4 990 363	102 201		3 296 483
Revenus des propriétés	3 017 670	886	1 578	2 930 024
Souscriptions et dons.	0	76 085	9 392	0
Collectes	1 295 096	1 946	419	461 797
Subsides des communes. . . .	1 464 403	24 848	3 600	808 775
Subsides des prov. ou de l'État .	5 275	0	0	82 652

Sur 1000 habitans des Pays-Bas, on en compte de 122 à 123 qui reçoivent des secours à domicile, et près de la moitié se trouvent dans les villes. Les charges et frais d'administration reviennent par individu à fl. 0,95, les secours à 6,60.

Les sociétés qui distribuent des alimens et du chauffage pendant l'hiver, comptent 8,976 souscripteurs, et ont distribué 1692147 portions de soupe, 22847 livres de pain, 439 mesures de pomme de terre, etc.

Les six institutions de charité maternelle, sont établies à Verviers, Gand, Harlem, Rotterdam, Leide et Groningue.

Sur les 41748 individus secourus dans les hospices, 38827 appartenaient aux villes. Cette population se composait de 7449 malades, 15002 vieillards et infirmes, et 19197 enfans. Les charges et frais d'administration, reviennent par individu à fl. 22,79, les frais d'entretien et de nourriture à 78,96, en tout 101,75.

Il existe aussi cinq sociétés qui ont fourni des secours à 2460 pauvres honteux, pour la valeur de 10310 fl.

Quand aux institutions pour tout le royaume, elles se composent principalement de l'hospice militaire de Leide et de l'hospice de Messines, ouvert aux filles des militaires devenus invalides ou morts au service de l'état. Ce dernier établissement renferme 140 individus, et a dépensé 21200 fl. Les premiers ont secouru 2178 individus au moyen de 108302 fl.

On trouvera dans le tableau suivant, les documens relatifs aux hospices et aux individus secourus à domicile, pendant l'année 1827.

PROVINCES.	SECOURS A DOMICILE. INDIVIDUS SECOURUS.	SECOURS A DOMICILE. DÉPENSES TOTALES.	HOSPICES. INDIVIDUS qui S'Y TROUVAIENT.	HOSPICES. DÉPENSES TOTALES.	POPULATION des PROVINCES.
Brabant septentrional	22 873	243 529 fl.	606	72 002 fl.	332 551
Brabant méridional	113 690	392 795	4 646	532 605	499 728
Limbourg	42 039	168 261	1 420	110 018	328 234
Gueldre	20 575	254 289	1 275	181 799	293 396
Liége	55 648	164 451	1 298	165 494	347 625
Flandre orientale	72 148	385 187	3 062	309 490	708 705
Flandre occidentale	84 600	397 566	2 208	248 165	575 807
Hainaut	104 220	339 373	3 646	284 818	567 300
Hollande septentrionale	83 626	681 414	7 854	778 738	391 586
Hollande méridionale	44 509	1 009 801	4 304	555 307	453 818
Zélande	8 960	240 328	699	90 244	133 932
Namur	25 642	48 182	1 263	87 820	194 845
Anvers	22 777	256 815	4 138	291 285	338 294
Utrecht	14 966	246 457	976	146 354	122 213
Frise	19 467	497 971	1 519	135 954	200 332
Overyssel	7 065	112 013	789	88 921	165 936
Groningue	8 345	214 738	1 592	139 765	153 982
Drenthe	2 040	36 157	161	8 681	59 915
Luxembourg	2 431	17 568	292	20 543	298 655
LE ROYAUME	755 621	5 706 895 fl.	41 748	4 248 003 fl.	6 166 854

Les institutions qui ont pour but de diminuer le nombre des pauvres, étaient les suivantes, en 1827 :

NATURE DES INSTITUTIONS.	NOMBRE.	IND. SECOUR.	DÉPENSES.
Écoles ordinaires, *écoles spéciales pour les pauvres*	262	56 950	237 883 fl.
— *où l'on admet les pauvres*	3 782	88 987	133 171
— *gratuites*	251	26 535	?
Écoles de travail	50	2 514	25 287
Ateliers de charité	32	6 860	328 548
Dépôts de mendicité	7	2 943	234 698
Colonies des sociétés de bienfaisance.	11	8 140	1 516 415
Établiss. pour les sourds et muets	4	249	42 095
— pour les aveugles	1	40	12 103

Sur 56950 enfans qui se trouvent dans les écoles spéciales pour les pauvres, 51,936 appartiennent aux villes. Les écoles où les enfans des pauvres sont instruits gratuitement, en communauté avec d'autres enfans, se trouvent pour la plupart dans les communes rurales. Les écoles gratuites se divisent en écoles hebdomadaires, dominicales et gardiennes : les enfans sont admis dans ces dernières, au-dessous de six ans.

Dans les écoles de travail, on n'admet que des filles. Ces établissemens se trouvent dans le Brabant septentrional, la Gueldre, les Deux-Flandres, la Zélande et Anvers.

Les ateliers de charité ne se trouvent pas dans toutes les provinces ; ils sont administrés par des commissions ou des directeurs.

Sur les 11 colonies des sociétés de bienfaisance, cinq, dites libres, contiennent 541 habitations. Les six autres sont composées de 7 établissemens pour des orphelins, des enfans trouvés ou abandonnés et des mendians, de 63 bâtimens auxiliaires et de 45 grandes fermes avec leurs dépendances. La population se compose de 3485 individus vivant en famille, 2076 orphelins ou enfans trouvés et abandonnés, et de 2579 mendians.

Les établissemens pour les sourds et muets se trouvent à

Gand, Liége et Groningue; et l'établissement pour les aveugles est à Amsterdam.

Il faut rapporter encore aux institutions précédentes, la *Société pour l'amélioration morale des détenus*, qui compte 5072 membres, et dont les soins s'étendent à plus de 600 détenus. Ils ont donné lieu à une dépense de 5813 fl. Les revenus s'élèvent à plus de 17000 fl.

Les institutions qui tendent à prévenir l'indigence, peuvent être classées comme il suit :

INSTITUTIONS.	NOMBRE.	IND. SECOUR.	DÉPENSES.
Monts-de-piété communaux . . .	108	128 570	7 417 354 fl.
— affermés	74	5 656	. ?
Caisses de secours mutuels. . . .	443	69 025	287 914
Caisses de pensions de veuves. . . .	26 ?	13 000	225 000
Caisses d'épargnes	53	13 882	1 047 890

Les monts-de-piété dirigés pour compte des communes ou des institutions de bienfaisance, ont reçu 2215755 gages en 1827, 2011772 ont été retirés et 120609 ont été vendus. Les mêmes nombres ont été respectivement, pour les monts-de-piété affermés, 877395, 668302 et 41280.

Les caisses de secours mutuels pour les cas de maladies et pour couvrir les frais d'enterrement, comptent communément 15726 individus qui reçoivent des secours pour une valeur moyenne de 18 fl. 31 cents par individu, et la dépense pour les participans est 4,17.

Les caisses des pensions pour les veuves et les orphelins, sont plus particulièrement établies dans les provinces septentrionales; les documens qu'on possède ne sont pas suffisans.

Les capitaux des caisses d'épargnes montent à 2312167 fl., ce qui donne 166 fl. 56 c. par individu.

Au total, d'après les conclusions du rapport, les institutions de bienfaisance sont au nombre de 11440, non compris la société pour l'amélioration morale des détenus, et les caisses des pensions pour les veuves et les orphelins. Le nombre des in-

dividus qui participent aux bienfaits de ces institutions, est de 1214055, et l'ensemble des dépenses s'élève à 12821359 fl.

Or, si l'on considère que la population, en 1827, était de 6166854 âmes, il résulterait de ce qui précède, que, dans le royaume des Pays-Bas, un habitant sur cinq, recevait des secours. La grandeur de ce rapport tient sans doute à ce qu'il est beaucoup d'individus qui reçoivent des secours de différentes natures, et qui figurent ainsi plusieurs fois dans le total.

Correspondance et annonces scientifiques.

La première classe de l'Institut des Pays-Bas a fait paraître depuis peu la seconde partie de ses nouveaux mémoires : *Nieuwe verhandelingen der eerste klasse van het Koninglijk Nederlandsche Instituut.* Ce recueil contient six écrits sur différentes parties de l'histoire naturelle, par MM. *Van Dyk*, *Van Beek*, *Van Breda*, *Vrolik* et *Vander Boon Mesch*, ainsi qu'un mémoire *sur un colorigrade*, par M. *Van Beek*. Nous regrettons que la nature de ce journal ne nous permette de parler que de ce dernier travail. L'auteur commence par donner un aperçu historique très-succinct des travaux des physiciens sur les phénomènes de la polarisation de la lumière; il parle ensuite du colorigrade, dont *Biot* a donné la description dans son *Précis élémentaire de physique expérimentale*, et finit par décrire un petit instrument qu'il a imaginé lui-même pour mesurer les différentes teintes. On peut concevoir cet instrument comme formé d'un tube cylindrique porté sur un pied à peu près comme les microscopes. Aux deux extrémités du tube sont placés deux miroirs dont les plans sont à angle droit et inclinés de manière à polariser complétement la lumière; le faisceau qu'on veut polariser tombe sur le miroir inférieur par une ouverture latérale, et on observe sur le miroir supérieur par une petite lunette latérale d'un court

foyer. Entre les deux miroirs et au milieu de l'instrument on place une ou plusieurs petites lames de mica sur un support circulaire en cuivre qui peut se mouvoir autour d'un axe horizontal. Enfin, à l'extrémité de cet axe, est attachée une aiguille qui indique sur un limbe gradué l'angle sous lequel on incline les lames de mica. Il est superflu de faire remarquer que le faisceau lumineux qui avoit été polarisé sur le premier miroir et qui aurait échappé ainsi à la réflexion sur le second, y produit différentes teintes en traversant préalablement le mica sous différentes incidences. M. *Van Beek* a eu soin d'indiquer comment on calcule la correspondance des teintes observées avec celles des anneaux colorés calculés par *Newton*.

— En même temps que le volume de ses mémoires, l'Institut des Pays-Bas a fait parvenir à ses membres le *procès verbal* de sa 22[e] séance générale, tenue le 31 août et le 1[er] septembre derniers; ainsi qu'un exemplaire d'un mémoire très-intéressant de M. *Moll*, professeur à l'université d'Utrecht, sur la manière de chauffer les serres au moyen de l'eau.

— Nous avons reçu depuis peu l'*annuaire de la province de Limbourg*, rédigé par la société des amis des sciences, lettres et arts, établie à Maestricht. Cet utile recueil continue à présenter sur le système du monde, et sur les anciens monumens de la ville de Maestricht, des notices qu'on lira avec intérêt. Les physiciens y trouveront aussi des observations météorologiques excellentes. La publication du recueil exige malheureusement que le dernier mois de chaque année soit lié aux 11 mois qui suivent, afin de présenter un ensemble de 12 mois. M. le professeur *Crahay* a eu l'obligeance de nous adresser l'ensemble des observations de 1829, pour faire suite aux observations qui ont été insérées dans les volumes précédens. On les trouvera dans le numéro qui suit.

— Depuis le commencement de cette année, M. *Dela Coste*, Gouverneur de la province d'Anvers, a été nommé Ministre de l'Intérieur, en remplacement de M. *Van Gobbelschroy*, appelé aux fonctions de Ministre pour le Waterstaat, l'In-

dustrie Nationale et les Colonies. Nous nous rappelons avec reconnaissance à cette occasion que c'est au commencement du ministère de M. *Van Gobbelschroy* qu'a été arrêtée la construction d'un observatoire à Bruxelles, dont le projet avait déjà été accueilli favorablement, plusieurs années auparavant, sous le ministère de M. *Falck*, mais que le départ subit de cet homme d'état si distingué à tant d'égards, n'a permis de réaliser que sous un troisième ministère.

— On vient d'organiser à Bruxelles une *école supérieure de commerce et d'industrie*, qui a pour objet le haut enseignement de toutes les branches des sciences et des arts que doivent plus spécialement connaître les personnes qui se vouent au commerce, à l'industrie et aux manufactures. L'ouverture de cet établissement a eu lieu le 10 janvier de cette année. L'enseignement comprend : la tenue des livres ; l'arithmétique ; l'algèbre ; la géographie ; la connaissance des marchandises ; la physique générale ; la législation commerciale ; l'économie ; l'histoire du commerce ; le dessin et la perspective ; la géométrie ; la mécanique et la minéralogie.

— M. *Lobatto* a fait paraître sous le titre *Beschouwing van den aard, de voordeelen, en de inrigting der maatschappijen van levens-verzekering*, in-8°, 180 pages, un livre qui pourra être fort utile aux personnes qui veulent s'occuper des calculs des sociétés d'assurances, sans avoir les connaissances suffisantes pour lire les traités ordinaires de calcul des probabilités. On ne sent pas encore assez généralement les avantages de ce dernier calcul, peut-être parce qu'il a été exposé jusqu'à présent dans des ouvrages mathématiques trop hors de la portée de ceux qui auraient pu s'en servir avec succès. Ces considérations nous avaient porté nous-même à publier, il y a deux années, des *instructions populaires sur le calcul des probabilités*, servant pour ainsi dire d'introduction à nos cours de physique et d'astronomie au musée de Bruxelles. M. *Lobatto*, en faisant un ouvrage spécial sur les assurances, a consulté les besoins de l'époque : les sociétés dont il parle, commencent à s'établir chez nous, et il ne paraît pas en général que même les

personnes qui les forment, possèdent bien les élémens des calculs qui doivent leur servir de base; ce qui peut avoir les résultats les plus fâcheux pour la société. L'auteur se plaint aussi dans sa préface de ce que les mathématiciens de ce pays négligent entièrement ce genre de recherches. *Sedert* (Struyck *en* Kersseboom), *schijnt de smaak voor de beoefening der politieke rekenkunde, en der daarmede zoo naauw verbondene theorie der levensverzekeringen, hier te lande onder de wiskundige ten eenen male verloren te zijn geraakt;* peut-être cet oubli n'est pas aussi grand que le fait l'auteur; du moins l'Académie de Bruxelles, en mettant au concours, pendant plusieurs années, l'examen des théories des sociétés d'assurances, a prouvé qu'elle n'avait pas entièrement perdu de vue ce sujet important. Quoiqu'il en soit, puisque, faute de réponse suffisante, elle a dû retirer cette question, on n'en appréciera que mieux l'utilité du second ouvrage que M. *Lobatto* annonce sur les théories mathématiques des assurances, qu'il n'a pu exposer dans son premier travail. Nous avons inséré dans ce cahier la table de mortalité qu'il a calculée pour Amsterdam; elle embrasse une période de dix années; elle est par conséquent plus complète que celle qui a été calculée par M. *Verhulst*, pour la même ville (tom. III, pag. 105). L'auteur a présenté encore plusieurs autres tables dont les calculs ont dû exiger beaucoup de soins et de temps.

— Au nombre des traités de physique qui ont paru depuis quelque temps, et dont plusieurs appartiennent à des savans distingués, on doit joindre l'ouvrage que M. *Péclet* publie à Paris, chez MM. *Malher* et comp^{e}., sous le titre : *Traité élémentaire de physique*, in-8°, 634 pages. Le second volume qui doit traiter des corps impondérables, n'est point encore en vente. Ce qui nous paraît caractériser cet ouvrage, c'est le grand nombre d'applications aux arts industriels qu'on y trouve. L'auteur est avantageusement connu depuis long-temps par des traités spéciaux sur la chaleur et l'éclairage, ainsi que par des expériences intéressantes sur les mouvemens de l'air dans les cheminées. Une première édition avait déjà été épuisée, celle

qu'il publie a dû naturellement s'enrichir d'un grand nombre d'observations utiles, qu'il a pu recueillir comme maître de conférences de physique à l'école préparatoire de Paris et comme professeur de physique à l'école centrale des arts et manufactures.

— Nous avons reçu de Breda deux réponses de MM. *Meyer* et *Weiler*, à la question sur le contact des sphères, proposée par M. *Noël*, tom. V, pag. 360.

— La société des *sciences naturelles* de Liége a proposé, pour le concours de 1830, les questions suivantes :

Donner une notice sur la vie et les ouvrages des hommes nés dans le royaume des Pays-Bas, qui se sont fait un nom dans les sciences naturelles et mathématiques.

Donner la description géologique et minéralogique des différens calcaires de la province de Liége; indiquer les propriétés des chaux qu'on en retire; et, spécialement, quelles localités de cette province peuvent fournir des chaux hydrauliques.

Indiquer, pour raffiner le sel brut, un procédé plus économique que celui de l'évaporation.

On propose aussi pour 1831, cette question :

Exposer l'histoire chimique de la matière colorante du sang, et rechercher à quels usages cette substance peut être appliquée dans les arts.

Le prix de chacune de ces questions est une médaille d'or de la valeur de 50 florins des Pays-Bas. Les mémoires doivent être écrits en français, en hollandais ou en latin; ils seront adressés, francs de port, à M. *Wellekens*, secrétaire général, avant le 15 juillet 1830, s'ils répondent à l'une des trois premières questions; avant le 15 juillet 1831, s'ils répondent à la dernière. Ils ne peuvent pas être écrits de la main de l'auteur; ils porteront une épigraphe, et on y joindra un billet cacheté, contenant la signature de l'auteur, et présentant à l'extérieur la même épigraphe.

La société est propriétaire de tous les mémoires envoyés au concours.

(Nous regrettons d'avoir reçu ces questions trop tard pour les insérer dans un des cahiers précédens).

— En parlant des différens établissemens scientifiques que renferme Bruxelles, nous n'avons point encore cité le *Musée national pour l'industrie et les arts*, dont la création est toute récente. Quoique cet établiseement soit encore à sa naissance, nous ne craignons pas de dire qu'il peut être comparé avec avantage à ce que l'Europe renferme de mieux dans ce genre : on verra surtout avec plaisir dans la collection de physique, la belle machine électrique qu'a fait construire M. *Onderde-Wyngaart Cantius*, et qui est certainement la plus grande qui existe actuellement. Après avoir visité le musée national, on éprouve le besoin d'y revenir encore et d'exprimer sa reconnaissance envers le savant qui le dirige.

— M. *Cambier* a ouvert depuis peu au musée un cours public et gratuit d'analise et de géométrie analitique, qu'il a mis en harmonie avec les autres cours scientifiques qui ont lieu dans le même établissement. La manière dont ce cours est fréquenté prouve suffisamment en faveur de son utilité.

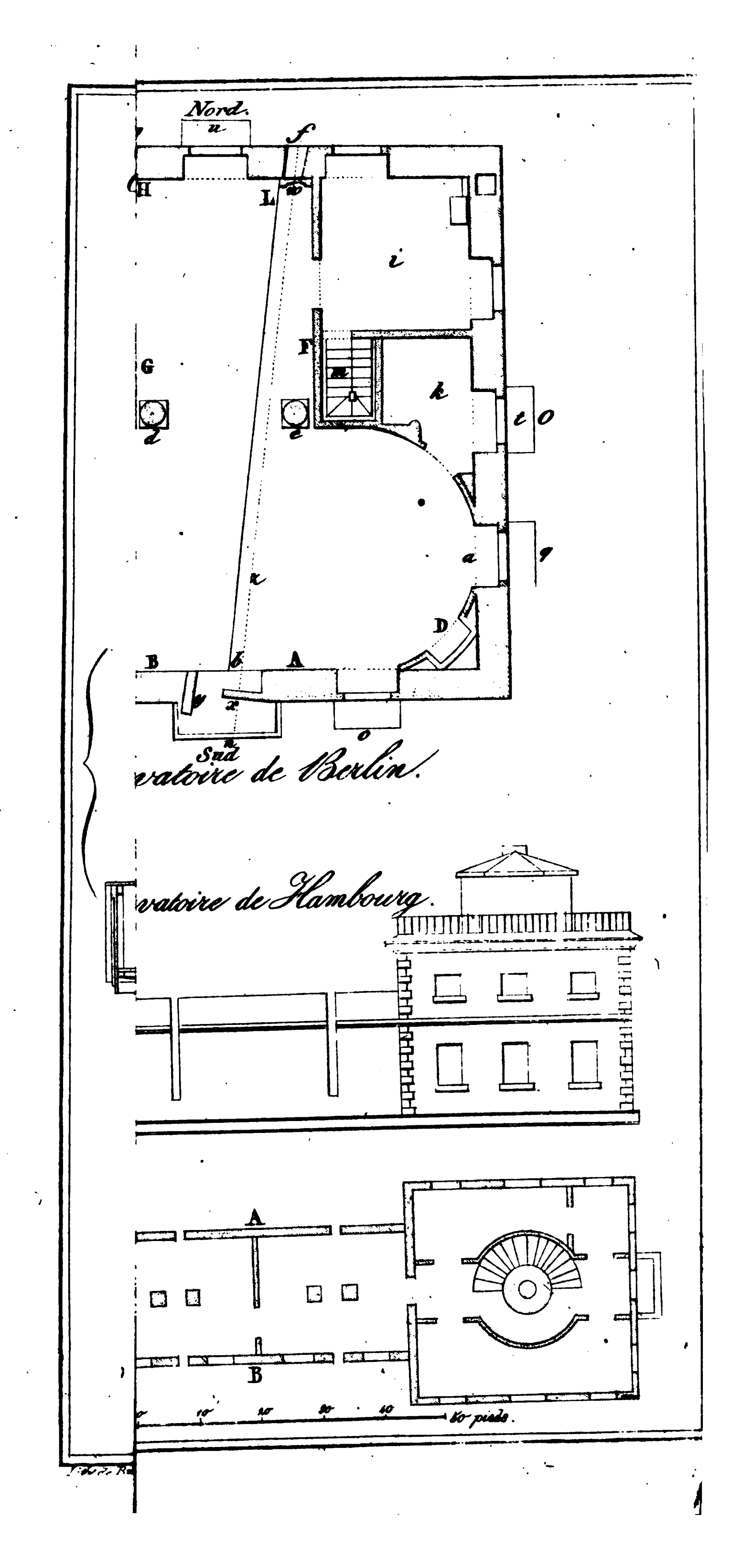
— Il s'est organisé depuis peu à Paris une *Société française de statistique universelle*, qui compte déjà au nombre de ses membres les savans les plus distingués de la capitale. Cette société publiera 1° le recueil de ses travaux; 2° les ouvrages couronnés par elle; 3° la collection des documens imprimés ou manuscrits qui lui sont adressés, et de ceux recueillis par ses soins dans les ouvrages, mémoires et rapports, tant anciens que modernes, publiés soit en langue nationale, soit en langues étrangères.

— Nous venons de recevoir une dissertation que M. *J. Bretel* a publiée depuis peu à l'occasion de sa promotion au grade de docteur en sciences. L'auteur, en examinant les conditions d'équilibre dans les machines, nous paraît avoir fait preuve de connaissances, et il a montré en même temps qu'il savait donner à ses recherches une direction utile.

QUESTION. — On demande d'assigner les limites des racines de l'équation

$$o = \int_o^\pi \sin.^{2i}\omega . \cos. (\alpha \cos. \omega)\, d\omega$$

résolue par rapport à α, en supposant que la lettre i dénote un nombre entier quelconque. (*M. Pagani.*)


Nord.
u
f
H
L
w
i
F
G
m
k
t O
d
c
a
q
x
D
B
b
A
y
x
o
n
Sud
…rvatoire de Berlin.
…rvatoire de Hambourg.
A
B
10
20
30
40
50 pieds.



Lith. de Burggraaff à Br

ANNALES

DES

SCIENCES D'OBSERVATION,

COMPRENANT L'ASTRONOMIE, LA PHYSIQUE, LA CHIMIE, LA MINÉRALOGIE, LA GÉOLOGIE, LA PHYSIOLOGIE ET L'ANATOMIE DES DEUX RÈGNES, LA BOTANIQUE, LA ZOOLOGIE; LES THÉORIES MATHÉMATIQUES, ET LES PRINCIPALES APPLICATIONS DE TOUTES CES SCIENCES A LA MÉTÉOROLOGIE, A L'AGRICULTURE, AUX ARTS ET A LA MÉDECINE;

PAR MM. SAIGEY ET RASPAIL.

Prospectus.

LORSQUE la connaissance d'un nouvel ordre de phénomènes vient ouvrir une nouvelle carrière aux investigations de l'esprit, la science qui se forme de l'ensemble de ces premiers faits, se trouve d'abord isolée de toutes les autres. Il faut, en s'y livrant, se condamner à marcher au hasard dans les sentiers que le hasard nous trace; plus on s'éloigne du point de départ, plus on semble s'isoler encore; lorsque enfin, à force d'avancer dans cette région qui ne peut être sans limites, on arrive inopinément sur le terrain d'une science voisine, que d'autres intelligences exploraient dans un pareil isolement : dès-lors il serait tout aussi ridicule de vouloir cultiver ces deux sciences indépendamment l'une de l'autre, qu'il le serait d'interdire à deux peuplades limitrophes toute espèce de rapports et de communication.

Si l'histoire des sciences nous les montre parfois animées d'une vie nouvelle, et marchant à grands pas vers leur perfection, c'est toujours aux époques où elles se sont prêté un appui réciproque. On peut dire, sans exagération, qu'en appliquant l'algèbre à la géométrie, Descartes a plus fait pour le

progrès de ces deux sciences, que tous les géomètres qui l'avaient précédé. C'est par l'analyse mathématique, en effet, que ses successeurs, s'élevant aux plus sublimes théories, ont pu réduire toute la mécanique en formules, et tracer dans l'espace, avec une précision inespérée, la marche de tous les corps planétaires. C'est encore en suivant l'exemple de Descartes, que les géomètres, appliquant le calcul à la physique, sont parvenus depuis à soumettre à des lois rigoureuses la plupart des phénomènes généraux de la nature. Les réactions atomiques elles-mêmes ont paru soumises à ces lois, et c'est ainsi que la chimie a passé du laboratoire mystérieux de l'alchimiste dans le cabinet du physicien. C'est aussi par l'étude de la physique et de la chimie, que le minéralogiste a cessé d'être un simple collecteur de pierres, et le géologue un rêveur de systèmes cosmologiques. C'est enfin par le concours de toutes les sciences positives, que le naturaliste finira par élever à ce même rang, et l'étude des plantes qui n'était d'abord que l'étude des *simples*, et l'étude des animaux qui n'était d'abord que l'étude de leurs formes organiques.

Mais ces heureuses révolutions des sciences, ces alliances fécondes, ne s'opèrent jamais sans résistance et sans secousse. L'homme aime mieux briser un sceptre que de le céder ou le partager. Le savant se décide difficilement à désapprendre; une innovation l'épouvante, parce qu'elle l'humilie et le détrône; il la repousse, il l'attaque avec une espèce de fanatisme. Aveuglé par le sentiment d'une longue possession et d'une réputation acquise, fier de l'ascendant que lui procurent les emplois et les honneurs qui lui furent prodigués, il voudrait pouvoir accabler l'indiscret novateur : vain espoir! alors même que la mort éclaircirait moins vite les rangs de ces vétérans de la science, alors que la génération qui grandit serait moins disposée à embrasser de nouvelles théories, à propager des faits nouveaux, ces faits et ces théories finiraient toujours par triompher de tous les obstacles.

Mais la victoire, qui viendra enfin consacrer ces nouveaux progrès de la science, lui deviendra bientôt funeste. On verra les vainqueurs, familiarisés avec les délices du triomphe, avec les aisances du pouvoir, avec les illusions de la flatterie, rendre à la génération qui les suit les torts de la génération qui les

précède, susciter les mêmes luttes pour essuyer les mêmes revers. Les doctrines cartésiennes luttant encore en France contre les vieilles universités, alors que les théories de Newton régnaient déjà sans partage en Angleterre; les cartésiens, à leur tour, repoussant les principes de la philosophie newtonienne; Newton lui-même rejetant les découvertes d'Huygens, reprises et portées si loin depuis par Young et par Fresnel; Baumé et Lesage se débattant contre les belles théories de la chimie moderne; Romé-Delisle persiflant Haüy, qui, à son tour, persiflait l'interprète des phénomènes électro-magnétiques : voilà des exemples assez frappans de ce que l'on pourrait appeler la *morale des sciences*.

Cette morale, il est vrai, s'adoucira de plus en plus, soit par le souvenir de ces funestes aberrations, soit par la facilité que les savans auront à publier leurs doctrines; et c'est principalement à ces époques de transition, quand des idées nouvelles viendront revivifier la science, qu'ils trouveront de nouveaux interprètes, une arène pour soutenir la lutte, des associations pour propager la victoire. Ainsi parurent, en France, les *Annales de Chimie*, destinées à répandre les belles découvertes qu'avait provoquées la révolution chimique opérée par Lavoisier. Plus tard, les phénomènes galvaniques, et surtout la décomposition des alcalis sous l'influence de la pile, firent sentir la nécessité d'allier la physique à la chimie, sciences auxquelles le recueil précédent, sous le titre d'*Annales de Chimie et de Physique*, fut désormais consacré. Mais déjà le physicien était sorti de son cabinet pour observer, sur une plus vaste échelle, l'influence des agens naturels; déjà le chimiste avait transporté son laboratoire dans les mines : la physique du globe, la minéralogie et la géologie avaient éprouvé les heureux effets de cette coopération, et leur étude se trouvait inévitablement liée à celle des sciences précédentes. C'est ce qu'on a compris en Allemagne, où les journaux les plus accrédités réunissent aujourd'hui toutes ces sciences dans un même cadre.

Restait, dans l'isolement, l'étude des règnes organiques. L'arbitraire et, par suite, l'instabilité de leurs classifications, l'incohérence complète, pour ne pas dire l'absurdité des théories qui les encombrent, tout faisait présager aux esprits positifs que le temps était venu d'appliquer aux sciences natu-

relles les méthodes d'investigation des sciences physiques. On devait croire que les *Annales des Sciences naturelles*, qui s'annonçaient comme le complément des *Annales de Chimie et de Physique*, allaient imprimer ce nouveau caractère à l'étude de la vie et de l'organisation. Mais, simple recueil de mémoires le plus souvent sans importance, comme sans liaison avec les sciences d'un ordre supérieur, répertoire ennuyeux des rapports que l'Académie accorde à ses rédacteurs et à leurs amis, ce journal semble plutôt avoir été créé pour servir d'insatiables ambitions, que pour contribuer réellement aux progrès des sciences.

Ces progrès ne pouvaient être accélérés que par une franche acceptation des méthodes que la raison propose et que le succès justifie. Explorer, à grands frais, les régions les plus reculées du globe, pour y recueillir les productions que la nature a refusées à nos climats, ce n'est, dans ses résultats immédiats, qu'un moyen d'agrandir nos collections, et de réunir sur un seul point ce que des conditions d'existence avaient dispersé. C'est ensuite à la balance du physicien, au creuset du chimiste, au scalpel du naturaliste à nous révéler la connaissance intime de ces produits, et leur emploi le plus avantageux dans le commerce et dans les arts : hors de cette étude consciencieuse et raisonnée, l'histoire naturelle n'est plus qu'une science de mots et de vaines conjectures.

Mais si, pour satisfaire à ce désir de pénétrer au fond des choses, un auteur a emprunté à chaque science ce que l'étude de son sujet réclamait, pourra-t-il faire admettre son travail dans un recueil exclusivement consacré à l'une ou à l'autre de ces sciences? ou bien, se conformant à des idées reçues, devra-t-il rompre l'harmonie de ses découvertes, et déchirer son mémoire pour en rassortir les lambeaux à la couleur de ces différens recueils ?

Les journaux spéciaux, quelque diversifiés qu'ils soient, ne suffisent donc plus aux besoins des sciences, quand ces dernières ont acquis certains développemens. Ces besoins ne se trouveraient pas plus satisfaits, si l'on réunissait tous ces journaux en un seul; car il faut désormais une correspondance des diverses parties de la science, et non un simple rapport de voisinage ; il faut la réunion de toutes les méthodes scientifiques,

dirigées vers l'étude des mêmes objets, et non l'emploi isolé de ces méthodes. Les observations spéciales, il est vrai, peuvent enrichir les sciences de faits divers; mais elles n'en changent ni l'esprit ni la marche. C'est au contraire en s'attachant à toutes les questions fondamentales, en remontant aux principes de nos connaissances, en perfectionnant nos moyens d'investigation, en révisant les théories générales, qu'on peut espérer d'arriver à quelque chose de vraiment utile. S'il est de la nature des esprits vulgaires de rétrécir sans cesse leur horizon scientifique, en divisant et subdivisant le domaine de nos connaissances, il appartient à l'observateur judicieux d'abattre ces lignes de démarcation, de rapprocher les méthodes, d'établir de nouvelles communications entre toutes les parties des sciences; c'est à lui d'avertir la foule des observateurs qui s'égarent, de les ramener à leur point de départ, et de leur indiquer des routes plus sûres à parcourir; c'est à lui surtout de séparer nettement le champ des abstractions, du champ des observations positives, en développant les théories d'une manière purement rationnelle, en faisant un simple rapprochement de leurs conséquences avec les faits, soit pour établir entre ceux-ci des liaisons capables de soulager la mémoire, soit pour arriver plus aisément à la découverte de nouveaux phénomènes.

Tels sont les principes qui continueront à diriger les rédacteurs des *Annales des Sciences d'observation*. Pour mettre leurs lecteurs à même de les suivre dans cette voie nouvelle, ils auront soin de rappeler, en peu de mots, les travaux que l'on aura déjà exécutés sur les sujets dont ils s'occuperont pour la première fois. Ils discuteront ces recherches, non dans l'intérêt des auteurs, mais dans celui des sciences et du public; et comme ils n'ignorent point que les sciences font encore plus de progrès par la destruction des erreurs et des préjugés qui les dominaient, que par l'acquisition directe de vérités nouvelles, ils espèrent que les auteurs qui s'égarent de bonne foi, accueilleront des remarques faites avec franchise; mais ils prendront sur eux-mêmes de mettre au grand jour, et les écarts du savoir présomptueux, et les sottises de l'ignorance en faveur : l'*Avertissement* placé en tête du 3e volume de ces *Annales*, peut indiquer le genre d'encouragement que ces principes ont reçu de la part des autorités académiques.

Indication des principaux articles contenus dans les six premiers numéros des *Annales des Sciences d'observation.*

TOME I, *premier numéro.*

Discours sur l'étude des Sciences d'observation. — Théorie mathématique sur l'existence d'une matière répulsive répandue dans tout l'univers; Saigey. — Évaporation des liquides à de hautes températures; Longchamp. — Froid produit par la dilatation de l'air; Legrand. — Recherches sur le Magnétisme par rotation; Saigey. — Sur la nouvelle théorie de la nitrification de M. Longchamp. — Examen du platine de l'Oural; Osann. — Réactif du sucre, de l'huile, de l'albumine et de la résine; Raspail. — Note sur la perforation de l'ovule végétal; Raspail. — Couche singulière de strontiane sulfatée; Daurier. — *Angelica scabra,* nouvelle ombellifère; F. Petit. — Note sur le genre *Centrophorum;* Raspail. — Revue zoologique sur la génération chez les bivalves; Raspail. — Parturition vivipare des bivalves; Raspail. — Sur l'Enseignement de l'agriculture; Raspail. — Beaucoup d'Extraits de minéralogie, de géologie, de botanique et de zoologie.

TOME I, *second numéro.*

2ᵉ Mémoire sur la matière répulsive; Saigey. — 2ᵉ Mémoire sur le magnétisme par rotation; Saigey. — Nouvelle théorie de la nitrification; Longchamp. — Extraction des radicaux des terres et des alcalis; et en particulier Extraction du *glucinium* et de l'*yttrium;* Wœhler. — Goniomètre microscopique; Raspail. — Examen critique de trois Rapports faits à l'Académie des sciences, relativement à la génération chez les végétaux; Raspail. — Histoire naturelle et classification des bélemnites des Alpes de Provence; Raspail.

TOME I, *troisième numéro.*

Réfutation du nouveau principe d'hydrostatique de M. Ivory. — Nouvelles expériences du pendule; Biot. — Discussion de toutes les expériences du pendule; Saigey. — Effets calorifiques de la pile; Delarive. — Nouveaux faits de magnétisme en mouvement; de Haldat. — Discussion des analyses chimiques des minéraux; Beudant. — Sur l'espèce végétale en général, et en particulier sur l'espèce dans les graminées; Raspail. — Monographie de deux *Panicum;* Raspail. — *Althenia,* nouveau genre de plantes; F. Petit. — Critique du *Flora gallica;* F. Petit. — Cours de physiologie générale; de Blainville. — Observations critiques, Extraits et Annonces.

TOME II, *premier numéro.*

3ᵉ Mémoire sur le magnétisme par rotation; Saigey. — Élasticité des corps qui cristallisent régulièrement; Savart. — Sur les Écluses des canaux de navigation; Girard. — Encre prétendue indélébile; Braconnot. — Re-

cherches sur le rhodium et le palladium; Berzelius. — Sur la Liqueur fumante de Boyle; Gay-Lussac. — Dilatation du phosphore et d'un alliage; Erman. — Densités et points de fusion des alliages; Kuppfer. — Additions au Mémoire sur les bélemnites; Raspail. — Monographie du genre *Hierochloe*, et du *Festuca flabellata;* Raspail. — Critique du travail de M. Guibourg sur l'amidon et l'hordéine; Raspail. — Critique du travail de M. Barruel sur les principes odorans du sang; Raspail. — Extraits, Revues et Observations diverses.

Tome II, *second numéro.*

4° Mémoire sur le magnétisme par rotation; Saigey. — Influence magnétique du rayon violet; Zantedeschi. — Chaleur spécifique des gaz; Delarive et Marcet. — Examen chimique de l'iridium; Berzelius. — Remarques générales sur l'analyse organique, et tableau de tous les principes des végétaux et des animaux; Saigey. — Déviations physiologiques et métamorphoses du *Lolium;* Raspail. — Anatomie comparée de deux espèces de *Strongylus* qui vivent dans le *Delphinus phocœna;* Raspail. — Lépidoptères nouveaux du midi de la France; Rambur. — Procédés divers pour la conservation des substances organiques. — Critique de l'analyse faite par M. Caventon, d'un sang particulier. — Nécessité d'être prudent en médecine légale. — Réaction singulière de l'acide sulfurique sur l'albumine; Raspail. — Examen du cours de M. Blainville. — Observations sur les cours de zoologie et d'agriculture au Muséum. — Nécrologie de M. Abel, géomètre norwégien. — Nombreux extraits de Mémoires.

Tome II, *troisième numéro.*

Expériences du pendule faites à Kœnigsberg; Bessel. — Action de la lune sur l'atmosphère; Flaugergue. — Chaleurs spécifiques des gaz; Dulong. — Nouvel opsiomètre; Lehot. — Nouvelle théorie de l'électricité; Saigey. — Sur la durée de la formation de certains terrains; Parrot. — Ossemens de mammifères dans le calcaire grossier de Paris; Robert. — Expériences chimiques et physiologiques sur le mécanisme de la circulation du suc dans un tube de *Chara*, et dans le système vasculaire des animaux; Raspail. — Analyse du suc de chara; analogie avec le sang; Raspail. — Non-existence de l'acide lactique; Raspail. — Essai de chimie microscopique appliquée à la physiologie; Raspail. — La gale de l'homme est-elle le produit d'un insecte? mystification médicale à ce sujet. — Nouvelles espèces d'épizoaires et d'entozoaires; Kuhn. — Critique des expériences de M. Barruel sur le sang; Soubeiran.

Nota. Ces six numéros, en deux volumes, ont paru en 1829, et forment le commencement de la collection des *Annales;* le prix en est fixé à 17 francs pour Paris, 20 francs pour les départemens, et 23 francs pour l'étranger.

Les *Annales des Sciences d'observation* comprennent : des mémoires originaux, accompagnés de planches gravées et coloriées; la transcription des meilleurs mémoires publiés dans d'autres journaux et dans les Recueils académiques; des extraits ou des analyses de mémoires moins importans; un choix d'annonces bibliographiques; l'analyse des séances des principales sociétés savantes; l'indication des prix qu'elles mettent au concours, et la critique de leurs actes; enfin des revues raisonnées sur les méthodes d'observation et sur les théories scientifiques.

Ces *Annales* paraissent tous les mois, par numéros de dix feuilles, de 38 lignes à la page, accompagnés chacun de quatre planches au moins. Trois numéros forment un volume, terminé par une table alphabétique des matières et des auteurs. Les lettres et paquets relatifs à la rédaction doivent être envoyés, *francs de port*, à l'adresse de *MM. Rouen frères, libraires-éditeurs, à Paris, rue de l'École-de-Médecine, n° 13.*

PRIX DE L'ABONNEMENT :

Pour Paris.	34 francs pour un an, 17 francs pour six mois;
Pour les départemens.	40 francs pour un an, 20 francs pour six mois;
Pour l'étranger.	46 francs pour un an, 23 francs pour six mois.

ON SOUSCRIT :

A PARIS, chez ROUEN frères, rue de l'École-de-Médecine, n° 13;

Dans les *départemens*, chez les directeurs de postes
et chez tous les libraires correspondans.

A *Londres*, chez Treuttel et Richter; — à *Bruxelles*, et toute la *Belgique*, au dépôt de la librairie médicale française; — à *Leipsick*, chez Michelsen; — à *Turin*, chez Bocca; — à *Lausanne*, chez Doy; — à *Genève*, chez Barbezat; — à *Florence*, chez Vieusseux; — à *Milan*, chez Gaetano Ferrario; — à *Naples*, chez Borel; — à *Saint-Pétersbourg*, chez Weyer; — à *Berlin*, chez Schlesinger; — à *Vienne*, chez Schaumburg; — à *Edinburgh*, chez Blackwood; — à *Philadelphie*, chez Carey et Lea; — à *Mexico*, chez Bossange; — à *Rio-Janeiro*, chez Dos Santos.

IMPRIMERIE DE H. FOURNIER, RUE DE SEINE, N. 14.

Notes extraites d'un voyage scientifique, fait en Allemagne pendant l'été de 1829, par A. Quetelet.

IIe ARTICLE.

Voyage en Saxe; Dresde et Leipsig.

En quittant Berlin, je me dirigeai vers Dresde. Je passai par Postdam, où je visitai les différens palais royaux et les anciens appartemens du grand *Frédéric*, encore pleins de souvenirs du roi philosophe et des savans qu'il avait réunis autour de lui. Je m'arrêtai peu de temps dans cette petite ville, et je me séparai à regret de M. *Encke*, avec qui j'avais eu le plaisir de faire cette partie de la route.

Dresde doit perdre beaucoup aux yeux du voyageur qui vient de visiter Berlin. Cependant cette ville mérite son attention, et si elle ne se recommande pas autant que la capitale de la Prusse, par ses établissemens scientifiques, elle lui présente, sous le rapport des arts, des objets qu'on chercherait vainement ailleurs. Son riche musée de peinture est une preuve de la magnificence des souverains de la Saxe (*), et du moins ici l'admiration n'est pas attiédie par de pénibles réflexions comme lorsqu'on visite le trésor où reposent enfouis des capitaux immenses qui, pour satisfaire une vaine curiosité, ont peut-être coûté bien cher au peuple. Parmi les nombreuses collections que Dresde présente à la curiosité des étrangers, se trouve

(*) Pendant mon séjour à Dresde, j'ai vu une exposition de tableaux des peintres modernes; on y remarquait plusieurs portraits exécutés avec beaucoup de talent, ainsi que quelques tableaux de chevalet, mais les tableaux d'histoire étaient presque nuls; il m'a paru que cette exposition était en général inférieure à celles que l'on voit annuellement dans nos villes.

à l'établissement du *Zwinger*, une collection d'anciens instrumens de mathématiques et de physique, et une chambre de modèles où l'on a déposé des machines de différentes espèces. Près de ce bâtiment on voit aussi un petit observatoire confié, ainsi que les collections précédentes, à la surveillance de M. l'inspecteur en chef *Lohrmann*, qui est encore chargé de la direction du salon mathématique où l'on exécute par la lithographie des cartes géographiques, des plans et d'autres objets d'art. Il paraît qu'on a l'intention de bâtir un observatoire nouveau; M. *Lohrmann* fait actuellement ses observations chez lui avec des instrumens qui lui appartiennent. On sait que ce savant s'occupe de la publication d'une topographie de la lune (*Topographie der sichtbaren mondoberflâche*, etc.), dont la première partie a paru en 1824. Il a eu la complaisance de me montrer les cartes qui doivent entrer dans la seconde partie; plusieurs déjà sont gravées. Ce travail sera sans contredit le plus complet et le plus remarquable qui aura paru sur ce sujet.

M. *Lohrmann* s'occupe aussi d'observations météorologiques, et publie en ce moment un recueil d'observations, précédé de documens relatifs aux années antérieures à 1829. (*Anhang zu den meteorologischen beobachtungen*, etc.) Je dois à son obligeance les tableaux qui se rapportent aux sept premiers mois de cette année. Les observations se font à Dresde, à Leipsig, à Chemnitz, à Weesenstein, à Freiberg, à Zittau, au passage de Oberwiesenthal et à Lichtentanne, près de Zwickau; on observe l'état du baromètre, du thermomètre, des vents, du ciel et la quantité de pluie tombée; tous ces résultats sont compris dans les tableaux. Malheureusement les observations ne se font pas tout-à-fait aux mêmes heures (celles de Dresde se font à 6, 9, 12, 3 et 6 heures). Ce recueil sera sans doute accueilli avec reconnaissance par les amis de la météorologie. En voyant tant de travaux faits avec une aussi louable persévérance, on ne peut s'empêcher de regretter que la science n'en ait pas jusqu'à présent tiré plus de profit.

Je ne voulus point quitter Dresde sans avoir vu les bords si pittoresques de l'Elbe, et sans avoir pris une idée de cette partie que l'on nomme la Suisse saxonne. Je dirigeai donc mon excursion par Lohmen et Bastey, vers le Lilienstein; et du haut de ce rocher escarpé, je pus découvrir sans peine toute la fameuse forteresse de Kœnigstein, et saisir le panorama de la Suisse saxonne, jusqu'à la montagne des Géans en Bohême. Je revins par Pirna, où se trouve un des plus beaux établissemens connus pour les aliénés; c'est du moins ce que m'assura M. le docteur *Lombard,* de Génève, qui s'est beaucoup occupé de ces sortes d'établissemens, et qui faisait avec moi l'excursion dont je viens de parler. Je quittai Dresde, non sans jeter un dernier regard sur ces champs fameux où de si grands intérêts ont été mis en présence, et dans le voisinage desquels s'est préparée la sanglante catastrophe qui a été consommée dans les champs vers lesquels je me dirigeais alors.

J'arrivai à Leipsig, le 24 août. Cette ville, la plus importante de la Saxe après Dresde, possède une des plus anciennes universités de l'Allemagne. Son voisinage des universités de Halle et d'Jéna a dû nuire à sa prospérité; il paraîtrait d'ailleurs que son organisation est susceptible d'améliorations; et qu'on se prépare à les mettre à exécution. L'appel de M. le baron *De Lindenau* au ministère de l'instruction, est du meilleur augure; et il n'est point de bon saxon, d'homme vraiment attaché au bien de son pays, qui n'applaudisse à un pareil choix. M. le baron *De Lindenau* est estimé depuis long-temps comme savant, mais ceux qui connaissent ses écrits, ignorent généralement que dans des temps difficiles, il a été pour ainsi dire le génie tutélaire de la Saxe. Sa physionomie pleine de noblesse et de franchise, est l'interprète fidèle des sentimens de son cœur, toujours ouvert aux idées grandes, aux pensées généreuses.

Leipsig comme Dresde, possède un observatoire, mais dont la forme est peu avantageuse; il renferme néanmoins plusieurs beaux instrumens, et il est dirigé par un homme de mérite,

par M. *Mœbius*, qui a publié plusieurs ouvrages estimés sur la géométrie.

L'observatoire a été construit de 1787 à 1790, au sud-ouest de la ville et sur la grande tour du château Pleissenburg. Cette tour présente au-dessus de la cour du château, sans y comprendre le bâtiment de l'observatoire, une élévation de 63 ¹/₂ aunes de Leipzig; sa forme, à partir de plus de la moitié de la hauteur, est celle d'un cylindre qui a 30 aunes de diamètre, et des murs de 4 ¹/₂ aunes d'épaisseur. Ce n'est pas sans fatigue qu'on monte à l'observatoire par un escalier qui serpente en hélice le long des murs circulaires de la tour, dont l'intérieur est entièrement vide : on arrive alors à une salle cylindrique de 23 aunes 14 pouces de diamètre et de 11 aunes 17 pouces de hauteur, de laquelle on peut passer par huit ouvertures dirigées vers les huit principaux points du ciel, sur une galerie extérieure de 3 aunes 8 pouces de largeur. Dans le pourtour de la salle sont établis six petits cabinets dont deux dirigés vers le midi, deux vers le levant et deux vers le couchant; les quatre derniers cabinets sont destinés à recevoir les grands instrumens astronomiques; deux quarts de cercle, l'un dirigé au nord et l'autre au sud, un secteur zénital et une lunette méridienne. La salle est couverte d'une coupole sur laquelle on a bâti un petit pavillon de forme cylindrique, plus pour la vue que pour faire des observations. Le plancher de ce pavillon qui est le point le plus élevé de Leipsig, où l'on puisse se placer commodément, est de 94 aunes au-dessus la cour du château. Le plan de cet observatoire est de MM. les professeurs *Borz* et *Hindenburg;* il a été exécuté par l'architecte *Dauthe*. J'ai puisé en partie ces détails et ceux qui suivent dans un ouvrage que je dois à l'obligeance de M. *Mœbius* (*Beobachtungen auf der K. universitäts sternwarte zu Leipzig*, etc., von *A.-F. Mœbius*. In-8°.)

Au commencement de 1794, l'observatoire fut attaché à l'université, et le professeur *Rüdiger* en fut nommé directeur, on lui donna aussi deux adjoints; il fut remplacé, en 1811, par le professeur *Mollweide*, auquel succéda, en 1817, M. le professeur *Mœbius*.

Ce dernier savant fut chargé aussitôt après sa nomination, de mettre l'observatoire en état de remplir le but de son institution; et il fit exécuter ce qu'il croyait être le plus convenable d'après les conversations qu'il avait eues avec les principaux astronomes de l'Allemagne, pendant un voyage qu'il fit pour cet objet aux frais du roi de Saxe. Il mit donc en place, comme instrumens principaux, une lunette méridienne de *Ramsden*, et un cercle de *Troughton*, en employant toutes les précautions exigées en pareil cas. On peut se faire une idée de la disposition de ces instrumens par le dessin ci-joint *pl.* IV. A et B sont des portions de mur du bâtiment, qui s'avançaient d'abord jusqu'en *a* et *b*, et formaient la porte de communication avec la galerie extérieure du côté du levant. C et D étaient deux cabinets dont les entrées étaient en *c* et *d*; ils composent à présent la salle d'observation avec la partie F, G, H, située au-dessus du mur jusqu'à la balustrade en fer. L'entrée de cette salle est en E; le cercle de *Troughton* se trouve en R, et la lunette méridienne de *Ramsden* porte sur les piliers P, Q. Ces piliers n'ont aucune communication avec le plancher. La pendule est placée en B et fixée contre le mur. G, K, L, sont des fenêtres dont la première est située vers l'orient. Les ouvertures méridiennes *n* et *s* sont fermées par deux volets verticaux et par deux trappes qui font partie du toit, et qui s'ouvrent par un mécanisme de leviers et par des manivelles placées en *k* et *l*. Ces différens arrangemens ont été faits de 1818 à 1821.

Les instrumens principaux que possède l'observatoire sont les suivans :

1° *La lunette méridienne* de *Ramsden*, qui a une ouverture de 3 pouces et une distance focale de 45,3 pouces, le réticule se compose d'un fil d'argent horizontal et de trois fils verticaux dont la distance est de 39″ en temps pour les étoiles qui décrivent l'équateur. L'instrument a deux oculaires dont l'un grossit 40 et l'autre 73 fois; l'axe horizontal a 34 pouces de longueur et ses tourillons ont 0,8 pouce d'épaisseur; il est soutenu en partie par des contre-poids. On éclaire les

fils par la partie de l'axe située à l'orient, et du côté opposé se trouve le demi-cercle sur lequel on lit, au moyen du vernier, à 1′ près, la distance polaire des astres. L'horizontalité de l'axe s'observe avec un niveau à bule d'air.

2° *Le cercle astronomique* de *Troughton* est l'instrument le plus beau de l'observatoire. Il se compose d'un anneau massif et horizontal de 6 pouces de diamètre; d'où partent trois doubles rayons très-solides qui, à 15 pouces du centre de l'anneau, présentent trois vis sur lesquelles l'instrument est porté; à ce système est attaché un cercle azimuthal de 20 pouces de diamètre sur lequel on lit les divisions de 10 en 10 minutes, et, au moyen de deux verniers, de 10 en 10 secondes. La lunette qui a une ouverture de 2,2 pouces et une distance focale de 33, est munie de trois oculaires dont les grossissemens sont de 100, 57 et 43. Le réticule placé au foyer a trois fils verticaux et trois fils horizontaux. Les étoiles sont mieux terminées qu'avec l'instrument de *Ramsden*. La lunette est fixée symétriquement entre deux cercles liés entre eux par 34 petits rayons de 3 1/4 pouces de longueur, et ce système porte sur quatre colonnes de cuivre. L'un des cercles est divisé de 10 en 10 minutes. Pour lire les minutes et les secondes, on a sousdivisé en deux parties égales chacun des intervalles précédens au moyen de points marqués très-délicatement. Puis avec deux micromètres microscopiques par lesquels on ne voit que les points dont il vient d'être question, on lit de 5 en 5 secondes. L'instrument est muni de deux niveaux.

3° *Une pendule* de *Wulliamy*, qui a l'échappement à repos de *Graham*. Le compensateur est à grille et formé de trois verges d'acier et de deux de zinc. On remonte la pendule de cinq en cinq semaines.

L'observatoire possède encore 1° une machine parallactique de *Troughton*, qui donne de 30 en 30 secondes les déclinaisons et les ascensions droites; 2° une lunette de quatre pieds de *Dollond;* 3° une pendule de *Naumann*, et un compteur; 4° un cercle de *Troughton*, de 17 pouces; 5° un équatorial de

Ramsden; les cercles ont 12 pouces de diamètre; 6° un sextant de *Troughton*, de 7 pouces; 7° deux lunettes achromatiques de *Cary* et *Berge*, de 45 à 46 pouces; trois télescopes grégoriens de deux pieds de longueur, et un télescope newtonien de deux pieds également; 8° des baromètres, des thermomètres, etc.

Plusieurs de ces instrumens, et entre autres la lunette méridienne et le cercle de *Troughton*, ont été donnés en présent à l'observatoire par M. le comte *De Brühl*, qui s'était occupé d'astronomie en Angleterre, où il se trouvait comme envoyé de Saxe. On doit aussi à la générosité de cet ami des sciences une partie de la bibliothéque qui renferme de très-beaux ouvrages sur les sciences, et particulièrement sur l'astronomie.

On découvre du haut de l'observatoire, une étendue immense; la vue embrasse vers le sud toute cette plaine de Leipsig, devenue si fameuse par les combats du 16, du 18 et du 19 octobre 1813, qui ont décidé du sort de la France et de l'Europe entière, et par la mémorable victoire que *Gustave-Adolphe* y remporta sur *Tilly*, le 7 septembre 1631; vers l'occident on aperçoit Lutzen, où *Gustave-Adolphe* périt l'année suivante, et où se livra la sanglante bataille du 2 mai 1813, entre les Français et l'armée des Russes et des Prussiens. L'œil suit aussi dans la plaine le cours de l'Elster, petit ruisseau qui vient toucher le nord de la ville, à l'endroit où le prince *Poniatowski* trouva la mort avec tant d'autres guerriers.

Pendant mon séjour à Leipsig, je visitai aussi le cabinet de physique de l'université, confié aux soins de M. le professeur *Brandès*, qui s'est acquis une réputation bien méritée par un grand nombre d'ouvrages sur les différentes branches des sciences physiques et mathématiques. Ce cabinet, sans offrir une bien ample collection d'instrumens, en contient cependant plusieurs très-remarquables; je dois particulièrement citer un bel appareil de *Fraunhofer*, pour observer les *raies* du spectre et les phénomènes que ce savant a désignés sous le nom de *spectres de seconde classe*. M. *Brandès* vient

de publier tout récemment le 3ᵉ cahier de ses *unterhaltungen für freunde der physik und astronomie.* Leipsig, chez *Barth.* On y trouve des recherches intéressantes sur les débordemens qui ont eu lieu à St.-Pétersbourg et sur toutes les côtes de la mer du nord pendant l'hiver désastreux de 1824 à 1825. On y lit aussi des observations curieuses sur différens phénomènes optiques que présente l'atmosphère. Il me fut agréable de faire la connaissance personnelle de ce savant, avec qui j'avais l'honneur d'être en relation depuis long-temps au sujet des étoiles filantes dont il s'est occupé avec beaucoup de succès, et dont j'ai eu occasion de m'occcuper ensuite, sans avoir jusqu'à présent publié mes résultats à cause de la longueur des calculs que je n'ai pu terminer encore.

Weimar, anniversaire de Goethe.

J'aurais désiré visiter l'université de Halle, qui est peu éloignée de Leipsig; mais des raisons particulières me déterminèrent à me diriger vers Weimar. J'arrivai dans cette ville à une époque mémorable; on s'apprêtait à célébrer le 80ᵉ anniversaire de la naissance de *Goethe*, le plus grand poète que possède l'Allemagne, et l'on peut dire que nous possèdions actuellement. J'eus l'honneur de recevoir de cet illustre vieillard un accueil plein de bienveillance; il voulut bien m'admettre à ses réunions particulières; et je profitai avec empressement de cette faveur qui comblait tous mes désirs. Doué d'un esprit flexible, d'une imagination ardente, *Goethe* a porté son attention sur presque toutes les branches des connaissances humaines. Les lettres, la philosophie, les sciences naturelles, la physique, les beaux-arts ont été tour à tour l'objet de ses méditations Après s'être informé avec bonté du but de mon voyage, il témoigna le désir de voir l'appareil avec lequel j'observais l'intensité magnétique; il eut même l'obligeance de m'offrir, pour faire mes expériences, le jardin qu'il occupe près du parc de Weimar, et qu'il a rendu célèbre à

jamais par les brillantes compositions que son génie y a fait naître. J'acceptai avec reconnaissance, non moins, je l'avoue, dans un but scientifique que par un sentiment bien naturel de curiosité et de vénération. Le jardin est placé sur le penchant d'une colline d'où l'on découvre tout le beau parc de Weimar jusqu'au belvéder, qui est la résidence d'été du grand-duc. L'habitation est petite et ornée avec une simplicité extrême; on pourrait dire de la maison et du jardin de *Goethe*, ce que ce grand poète met dans la bouche de *Werther* (*). « Le jardin est simple; et l'on sent d'abord en entrant, que le plan n'a point été tracé par un savant jardinier; mais par un homme sensible qui voulait y jouir de lui-même. » Mes expériences, comme on peut le penser, ne furent pas faites avec tout le calme nécessaire; il fallut retourner encore au jardin. et j'allai faire la troisième fois mes expériences dans un endroit isolé du parc. Lorsque M. *Goethe* sut que je m'occupais aussi d'expériences d'optique, il me montra avec une complaisance extrême ce qu'il avait fait sur cette partie intéressante de la physique : il eut même la bonté de me donner plusieurs verres pour les expériences de la polarisation et un ouvrage dans lequel il a consigé ses idées sur les divers phénomènes qui en dépendent et sur la théorie des couleurs.

Je lui dois également deux cahiers d'observations météorologiques, publiées sous ses auspices à l'observatoire de Jéna par *M.-L. Schrön* (**); le dernier cahier pour 1827, est le sixième de la collection : *Meteorologische beobachtungen*, in-8°. Ces observations se font simultanément à Jéna, à Ilmenau et au château de Wartburg, près d'Eisenach; elles formeront avec celles de Dresde et de Berlin des collections précieuses pour la météorologie. Elles concernent l'état du baromètre,

---

(*) *Der garten ist einfach, und man fühlt gleich bey dem eintritte, dass nicht ein wissenschaftlicher Gärtner, sondern ein fühlendes herz den plan gezeichnet, das seiner selbst hier genietzen wollte.*

(**) Le ministère des arts a été confié à M. De Goethe.

du thermomètre, de l'hygromètre d'après *De Luc*, la direction et l'intensité du vent, l'état du ciel en général, etc. Les observations se font à 8, 2 et 8 heures. Chaque cahier est accompagné de cartes où l'on rend sensibles à l'œil les résultats numériques obtenus pendant l'année.

Cependant arriva le 28 août; et, avec lui, le 80e anniversaire de *Goethe*. On avait craint d'abord que la succession d'émotions trop vives ne nuisît à la santé de l'illustre octogénaire, et qu'il ne fût forcé, par son âge, de se soustraire aux visites trop nombreuses de ses amis et de ses admirateurs. Il s'abstint néanmoins d'assister au banquet qui lui fut offert, et se fit remplacer par son fils, qui, dans une allocution touchante, se rendit l'interprète de ses sentimens. A cette fête, qui réunissait les littérateurs, les savans et les artistes de Weimar (*), assistaient encore plusieurs étrangers, parmi lesquels on distinguait le poète dramatique *Holtei* de Berlin, M. *Mickiewicz*, jeune poète polonais, qui a été pendant sept années exilé dans la Sibérie, pour avoir manifesté le désir de voir l'affranchissement de son pays; et M. *David*, de l'institut de France, qui venait de terminer un buste de *Goethe*, dont on s'accordait à louer la ressemblance et la parfaite exécution.

Le lendemain, on donna au théâtre une première représentation de *Faust*, d'après les modifications faites à l'original, avec l'approbation de l'auteur, par le célèbre littérateur *Tieck*. Je fus assez heureux pour passer presque toute la journée qui suivit cette représentation avec *Goethe*, qui continua à me montrer avec bonté ses expériences relatives à la lumière, ainsi que la collection de ses divers instrumens; ce qui faisait que la chambre dans laquelle nous nous trouvions, ne ressemblait pas mal à celle du docteur *Faust*, comme l'observait en plaisantant

(*) Nous citerons en particulier le savant philologue *Riemer*, M. *Mayer*, l'élève et l'émule de *Winckelmann*, M. *Peucer*, président du consistoire, M. *Froriep*, directeur de l'institut géographique, etc.; l'habile compositeur *Hummel* avait aussi ajouté au charme de cette fête par ses savans accords

sa belle-fille Mme *De Goethe*. Ma mémoire n'a rien perdu de ses entretiens pleins de charmes, pleins d'abandon; ils seront toujours présens à ma pensée; mais la confiance même dont l'illustre vieillard a bien voulu m'honorer, me fait un devoir de ne point révéler au public les petites circonstances de sa vie privée. Trop souvent l'étranger en pénétrant sous le toit hospitalier d'un grand homme, ne se fait point scrupule d'y introduire le public avec lui, et d'exposer à tous les yeux ce qu'il devrait regarder comme sacré et commis à sa délicatesse.

Weimar renferme plusieurs établissemens utiles; l'un des plus remarquables est la bibliothéque, qui est confiée aux soins du savant philologue *Riemer*. On y trouve, outre la collection des livres qui est très-riche, plusieurs antiquités et des objets d'art qui méritent l'attention du voyageur. On y voit avec attendrissement le portrait du grand-duc Charles-Auguste, dont tous les gens de bien ont regretté la perte, et dont le règne sera à jamais célèbre par les chefs-d'œuvre de *Goethe*, de *Schiller*, de *Wieland* et de *Herder*. Les bustes de ces illustres écrivains que l'amitié avait retenus auprès de lui, sont déposés dans la même enceinte.

L'institut géographique de M. le conseiller *Froriep*, est aussi un des beaux établissemens de Weimar; outre la construction des cartes géographiques, on s'y occupe encore de tout ce qui concerne l'imprimerie en général. M. *Froriep* dont les connaissances sont très-étendues, et particulièrement dans les sciences médicales qu'il a professées avec distinction, est aussi éditeur d'un journal très-répandu qu'il publie sous le titre : *Notizen aus dem gebiete der natur-und Heilkunde*, in-4°, par feuille.

Mon intention n'avait été que de m'arrêter deux jours à Weimar afin de pouvoir visiter Jéna, avant la réunion de Heidelberg où j'avais le dessein de me rendre; mais je me trouvai si agréablement retenu que je ne partis qu'au bout de huit jours et que, pressé par le temps, je dus me diriger directement vers Gotha. Je fis la route avec M. le professeur *Rassmann* de Gand; avec qui j'avais eu le plaisir de me retrouver successivement à Berlin et à Weimar.

Observatoire du Seeberg ; Gotha.

Malgré le temps le plus affreux, mon premier soin en arrivant à Gotha fut de me rendre à l'observatoire, situé sur le Seeberg, à une demi-lieue de la ville. Les chemins pratiqués sur les flancs de la colline sont si mauvais par les temps humides, qu'ils sont presque impraticables même pour les voitures. Je fus assez heureux pour rencontrer à l'observatoire M. *Hansen*, le directeur actuel, qui me montra avec beaucoup d'obligeance tout ce qui pouvait m'intéresser.

On sait que l'observatoire du Seeberg a été construit en 1788 par le duc Ernest, qui en confia la direction au baron *De Zach* (*). Ce célèbre astronome dont la longue carrière a été constamment consacrée aux sciences, a fait des observations nombreuses qui ont répandu beaucoup d'éclat sur l'établissement qu'il dirigeait; en quittant l'observatoire, il eut pour successeur son digne ami le baron *de Lindenau*, à qui l'on doit des observations et des tables généralement connues et estimées par les astronomes. M. *Nicolaï*, qui se trouve actuellement à Mannheim, prit la direction de l'observatoire en 1816, et eut à son tour, pour successeur M. *Encke*, qui ne tarda pas à être appelé à Berlin. M. *Hansen*, comme j'ai déjà eu occasion de le dire, avait été précédemment adjoint de M. *Schumacher*, à l'observatoire d'Altona. Cet astronome s'est fait connaître avantageusement par ses observations et par un écrit sur l'héliomètre *Ausführliche methode mit dem fraunhofer' schen heliometer beobachtungen anzustellen*, etc. Il s'est occupé dans ces derniers

---

(*) Voici comment M. le baron *De Zach* s'exprime dans l'*Annuaire de Bode* pour 1789, en parlant des soins que le duc prit lui-même de la construction de son observatoire : *So haben sie erst neulich selbst die berühmtesten ternwarten in England besucht, die werkstädte besehen, ...und selbst die herrlichen und fürstlichen instrumente für ihre künstige sternwarte bestellt, wovon künftig ein mehrers melden werde*, etc. Le plan de l'ancien observatoire se trouve dans l'*Annuaire* pour 1795.

temps des inégalités de Jupiter ; il a bien voulu me montrer différens résultats remarquables par leur élégance ; du reste, ce travail doit paraître dans les *Astronomische nachrichten*. L'obervatoire du Seeberg, plus généralement connu sous le nom d'observatoire de Gotha, ne se distingue pas seulement par la succession des astronomes habiles qui l'ont dirigé, mais encore par la simplicité de ses formes et la commodité de sa distribution, qu'on a plus ou moins imitée avec raison dans les divers établissemens de même nature qui ont été construits depuis.

Le IIIe volume de la *Correspondance Mathématique*, p. 87, contient sur l'observatoire du Seeberg une notice qui m'a été communiquée en même temps qu'un plan de cet édifice, par M. *Lohrmann* de Dresde. Malheureusement il s'y trouve quelques petites erreurs qu'il sera facile de redresser. L'observatoire avait été construit primitivement avec ses deux ailes, comme l'indique le plan, ou plutôt comme l'indique le plan de l'observatoire de Gœtingue, construit sur le même modèle et représenté avec plus d'exactitude sur la même planche ; mais on s'aperçut au bout de quelque temps que l'aile située à l'est avait éprouvé un dérangement. On prit donc le parti de la démolir, dans le dessein de la rétablir ensuite d'une manière plus solide ; mais ce projet n'a pas encore reçu son exécution. On enleva aussi la tourelle à toit mobile qui se trouvait au milieu de l'édifice comme à l'observatoire de Gœtingue, et qui était destinée aux observations à l'horizon, parce qu'on crut remarquer que la voûte éprouvait un affaissement. On voit encore l'escalier qui y conduisait. Les salles d'observation ne sont pas tout-à-fait distribuées comme dans le plan. Le mur de séparation indiqué à la bibliothéque, est plus rapproché d'une fenêtre, de la demeure du directeur ; de sorte que celui-ci en passant de chez lui dans l'observatoire, se trouve d'abord dans une chambre longue et étroite, fermée à chacune de ses extrémités par une seule fenêtre ; c'est l'emplacement actuel de la bibliothéque. Il passe de là dans une seconde chambre ayant deux fenêtres vers le nord et deux vers le sud. De ces quatre fenêtres deux diagonalement opposees, ont au-dessus d'elles des demi-

coupes méridiennes, auxquelles devaient correspondre deux quarts de cercle, pour observer au sud et au nord. On voit sur le dessus de la façade la coupe vers le sud, représentée telle qu'elle est effectivement : cette seconde chambre renferme encore les rayons de l'ancienne bibliothéque, ainsi que plusieurs lunettes et télescopes, et un héliomètre semblable à ceux de Hambourg et de Berlin : l'objectif qui a été coupé en deux parties égales pour répondre à sa destination, a une distance focale de 41 pouces 10 lignes, avec un diamètre de 34 lignes. Cette chambre est voisine du vestibule et de l'escalier qui occupent la partie centrale de l'observatoire, comme je l'ai déjà dit.

La seconde partie de l'observatoire est construite symétriquement à la première et renferme aussi deux chambres, dont celle du fond est la moins grande : on y trouve divers instrumens anciens, et entre autres un quart de cercle mobile, une aiguille d'inclinaison, des boussoles, des télescopes et les mesures dont le baron *De Zach* s'est servi pour sa base. La chambre attenante présente une coupe méridienne assez étroite, qui la partage en deux parties égales, et renferme deux instrumens de passage : l'un est une lunette méridienne de *Ramsden*, qui a une distance focale de 8 pieds, et comporte un grossissement de 80 fois. L'autre est une lunette méridienne avec cercle, qui sort des ateliers de Munich. Le cercle est divisé de 5 en 5 minutes ; avec les verniers on lit de 4 en 4 secondes ; et, à l'aide des microscopes, on lit les secondes et même les parties de la seconde. Le grossissement est de 150 fois. L'oculaire porte plusieurs fils, et entre autres cinq au milieu, dont les distances estimées selon l'équateur ne sont que de 6 à 7 secondes en temps. L'instrument est muni de contrepoids ; la pendule est placée à égale distance des deux instrumens disposés l'un derrière l'autre dans la direction du méridien, et se trouve vers la gauche de l'observateur quand il se tourne vers le sud.

Le dernier instrument est établi sur une voûte qui s'appuie sur la roche ; les fenêtres des coupes méridiennes s'ouvrent d'une seule pièce : on a établi dans le lointain une mire en échiquier, d'après la méthode indiquée par *Bessel*.

Vers le pied de la montagne du Seeberg est l'habitation de M. le conseiller *Von Hoff*, qui s'occupe avec succès de différentes parties de la physique et particulièrement d'observations météorologiques. Ce savant observe régulièrement le baromètre, le thermomètre et la direction des vents ; les heures qu'il a choisies à cet effet sont 6 heures du matin, 8 heures ; 2 heures de l'après-midi et 8 heures du soir. Son baromètre qu'il a eu la complaisance de me montrer, est d'une construction particulière. Le tube qui renferme la colonne barométrique est enchassé dans un cylindre de fer qu'on ferme en voyage, par un robinet dans lequel est une petite ouverture, contre laquelle s'applique un bouchon à ressort, pour empêcher le tube de crever par la dilatation du mercure. L'échelle avec le thermomètre qui y est attaché et qui descend dans le mercure, peut s'abaisser par une vis jusqu'à un niveau constant.

M. le professeur *F. Kries*, à qui l'on doit des ouvrages élémentaires estimés, fait aussi des observations météorologiques ; mais ses nombreuses occupations ne lui permettent que d'observer une fois par jour. J'ai profité d'un instant de beau temps pour m'occuper avec ce savant, de déterminer l'intensité magnétique dans son jardin.

On a pu voir avec quel soin la météorologie est cultivée dans le nord de l'Allemagne. On doit aussi beaucoup aux travaux de M. le professeur *Brandès* de Leipsig, et au savant du même nom qui habite à Salsuffel, et qui a présenté à la réunion des naturalistes à Heidelberg, les résultats de ses observations barométriques et thermométriques, faites heure par heure pendant l'année 1827. M. le professeur *Kâmtz* de Halle, que j'ai eu le plaisir de rencontrer aussi plus tard à Heidelberg, m'a dit qu'il préparait de son côté la publication d'un journal de météorologie.

Observatoire de Gœtingue.

L'observatoire de Gœtingue, dont la construction ne date que de 18 ans environ, est bâti sur le plan que l'observatoire de

Gotha avait d'abord, du moins quant aux principales distributions (voyez le plan dans le IIIe vol. de la *Correspondance*); l'extérieur est orné avec beaucoup d'élégance. Il est situé hors des murs, vers la partie méridionale de la ville. Les deux ailes servent de demeure aux directeurs MM. *Gauss* et *Harding*. La partie centrale, comme au Seeberg, présente quatre chambres, indépendamment du vestibule et de l'escalier qui correspond à la tourelle, destinée à recevoir un instrument parallactique. Les plus beaux instrumens de l'observatoire se trouvent dans la grande salle d'observation, située du côté de la demeure de M. le conseiller *Gauss* (les deux chambres situées du côté de la demeure de M. le professeur *Harding*, renferment une assez belle lunette méridienne qui est en place, ainsi que des télescopes et les différens instrumens avec lesquels l'astronome *Schrœter* observait à Lilienthal). Dans la salle où M. *Gauss* observe habituellement et dans la même direction méridienne sont établis deux beaux instrumens de passage, dont l'un est muni d'un cercle et rappelle, quant à la forme et aux dimensions, l'instrument analogue que j'ai vu chez M. *Schumacher*. Une mire placée dans le lointain, aide à vérifier la position des intrumens qui se vérifient encore mutuellement par la méthode indiquée par M. *Gauss*, dont j'ai déjà fait mention en parlant de l'observatoire d'Altona. On trouve encore dans la même salle un bel héliomètre semblable à ceux de Gotha, de Hambourg et de Berlin.

En me détournant de ma route pour me diriger vers Gœtingue, j'avais en vue autant de visiter l'observatoire que les deux célèbres astronomes qui l'habitent. Je me rendis donc à cet édifice aussitôt après mon arrivée. Chemin faisant, j'eus le bonheur de rencontrer M. *Gauss*, et de le réconnaître d'après un portrait que j'en avais vu quelques mois auparavant. J'eus le plaisir d'entendre parler cet illustre géomètre de ses travaux scientifiques et des ouvrages dont il prépare la publication. L'un de ceux qui ne tarderont pas à paraître, concerne la théorie mathématique des actions capillaires; il sera intéressant pour le monde savant, de voir en présence ceux qu'on a surnommés

le *Newton* français et l'*Archimède* allemand. M. *Gauss* a repris la théorie des actions capillaires par une analise et des considérations qui lui sont particulières ; il parvient par la marche qu'il a suivie, à vérifier les résultats du géomètre français et à détruire les objections qui y ont été faites, en même temps qu'il présente beaucoup de résultats nouveaux qui agrandiront le champ de la science. M. *Gauss* possède aussi un travail inédit sur l'analise et sur les fonctions elliptiques en particulier, dont les belles recherches de MM. *Abel* et *Jacobi*, ne formeraient que des cas particuliers. J'avais ouï dire que M. *Gauss* s'était laissé prévenir par ces deux jeunes savans dans la publication des découvertes dont nous venons de parler ; mais il paraît qu'il reste encore au géomètre de Gœtingue de quoi se consoler de cette contrariété. Ce qui l'empêche de mettre en ordre et de publier les travaux importans qu'il possède, provient surtout de la multiplicité des travaux que lui imposent la triangulation du Hanovre, qui se fait sous sa direction, les leçons qu'il donne comme professeur à l'université, ainsi que ses observations astronomiques et particulièrement celles qui concernent les petites planètes dont la théorie l'occupe depuis long-temps. Je dois à l'obligeance de ce grand géomètre un exemplaire des *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, qui ont paru l'année dernière à Gœtingue, ainsi qu'un exemplaire d'un bel ouvrage devenu très-rare aujourd'hui et publié à Helmstadt, en 1799, sous le titre : *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*. Je ne lui dois pas moins de reconnaissance pour la bonté avec laquelle il m'a montré les beaux instrumens dont il se sert, et pour la part qu'il a bien voulu prendre aux expériences que j'ai faites dans le jardin de l'observatoire, sur l'intensité magnétique. La presque identité de nos résultats m'a été d'autant plus agréable que nous avons observé simultanément, chacun d'une manière un peu différente. Je commence, comme M. le capitaine *Sabine*, à compter les oscillations, à partir du point de plus grand écart de l'aiguille, soit à droite

soit à gauche. Mais comme l'aiguille ralentit son mouvement vers ces points, et paraît un instant stationnaire, M. *Gauss* me faisait observer qu'on obtiendrait peut-être plus de précision en comptant les oscillations, à partir de l'instant où l'aiguille a sa plus grande vitesse, et se trouve au milieu de l'arc qu'elle décrit, ce qui d'ailleurs est un point qui ne varie pas avec l'amplitude des oscillations et qu'on peut reconnaître facilement sur le limbe au-dessus duquel se meut l'aiguille. L'instant que m'indiquait M. *Gauss* est en effet mieux déterminé, et le seul motif qui me fait préférer l'autre, est qu'on peut se tenir pendant l'observation à une plus grande distance de l'instrument, et éviter ainsi des erreurs d'une autre espèce qui naîtraient de la présence de quelques parcelles de fer qu'on pourrait avoir sur soi, malgré toutes les précautions qu'on aurait prises pour les éloigner. Les chronomètres mêmes qu'on emploie dans ces sortes d'observations, renferment toujours quelqu'acier.

M. le professeur *Harding*, que je m'empressai également de visiter, eut la bonté de me montrer la collection des instrumens qui avaient appartenu à l'observatoire de Lilienthal. Le hasard voulut que le jour de ma visite coïncidât avec l'anniversaire de la découverte de Junon, que l'on doit à ce respectable et habile astronome. On sait que la science lui est encore redevable d'un bel atlas céleste; M. *Harding* a été aussi l'un des premiers à répondre à l'appel que l'académie de Berlin a fait aux astronomes de concourir à présenter une revue des différentes parties du zodiaque.

Pendant le court séjour que j'ai fait à Gœtingue, je me félicite d'avoir aussi fait la connaissance du célèbre professeur *Heeren* et du grand naturaliste *Blumenbach*, qui, malgré son âge avancé, continue à s'occuper de ses études favorites; sa belle collection de crânes des différentes races d'hommes et des diverses espèces d'animaux, est un des objets les plus curieux que renferme Gœtingue, où l'on trouve d'ailleurs des collections scientifiques du plus haut intérêt.

Résumé des observations météorologiques faites à Maestricht pendant l'année 1829, par M. CRAHAY, professeur de physique à l'Athénée royal de Maestricht.

Les températures sont exprimées en degrés de l'échelle centigrade; les hauteurs du baromètre, réduites à la température de la glace fondante, et corrigées de l'effet de la capillarité, sont énoncées en lignes des Pays-Bas (millimètres). La cuvette du baromètre est placée à 52m, 51 au-dessus du niveau de la mer. Enfin les hauteurs des eaux de la Meuse sont observées à l'entrée de la grande écluse du bassin à Maestricht, et rapportées à la moyenne hauteur du niveau dans ce bassin, laquelle est fixée à 41, 95 aunes (mètres) au-dessus du zéro de l'échelle d'Amsterdam (*peil-schaal*).

MOIS.	TEMPÉRATURE MOYENNE PAR MOIS.			
	9 heures du matin.	midi.	3 heures du soir.	9 heures du soir.
Janvier	— 4°,07	— 2°,29	— 2°,28	— 4°,05
Février	— 0, 23	+ 1, 76	+ 2, 21	+ 0, 09
Mars	+ 4, 32	+ 7, 19	+ 8, 22	+ 4, 04
Avril	+10, 17	+12, 38	+13, 04	+ 9, 27
Mai	+15, 29	+17, 89	+19, 37	+14, 34
Juin	+18, 42	+20, 59	+21, 66	+16, 33
Juillet	+20, 25	+21, 97	+22, 23	+18, 18
Août	+17, 95	+20, 23	+20, 61	+16, 50
Septembre	+15, 73	+17, 56	+18, 31	+14, 85
Octobre	+ 9, 62	+11, 63	+11, 83	+ 9, 27
Novembre	+ 3, 40	+ 5, 66	+ 5, 70	+ 4, 13
Décembre	— 5, 34	— 2, 91	— 2, 93	— 4, 90
Moyennes	+ 8, 79	+10, 97	+11, 50	+ 8, 17

TEMPÉRATURE.

MOIS.	MAXIMUM moyen PAR MOIS.	MINIMUM moyen PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	MAXIMUM absolu PAR MOIS.	MINIMUM absolu PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	DATE DU MAXIMUM ABSOLU.	DATE DU MINIMUM ABSOLU.	Plus grande variation en 24 heures.
Janvier . . .	— 1°,85	— 6°,17	4°,32	+ 5°,4	—18°, 0	23°,4	2, à midi.	nuit. du 17 au 18	13°,5 le 26
Février . . .	+ 2, 39	— 2, 38	4, 77	+ 10, 0	— 10, 6	20, 6	21, à 3 h. s.	du 11 » 12	10, 5 » 24
Mars	+ 8, 30	+ 0, 47	7, 83	+ 16, 8	— 4, 9	21, 7	20, à 3 h. s.	du 24 » 25	16, 0 » 28
Avril	+ 13, 34	+ 5, 62	7, 72	+ 21, 4	— 0, 6	22, 0	16, à 3 h. s.	du 1 » 2	15, 3 » 16
Mai	+ 19, 51	+ 8, 94	10, 57	+ 25, 5	+ 1, 5	24, 0	23, à 3 h. s	du 31 av. » 1 m	15, 9 » 23
Juin	+ 22, 24	+ 12, 16	10, 08	+ 30, 5	+ 5, 4	25, 1	22, à 3 h. s.	du 1 » 2	16, 0 » 21
Juillet . . .	+ 22, 97	+ 14, 87	8, 10	+ 32, 0	+ 10, 9	21, 1	14, à 3 h. s.	du 9 » 10	15, 0 » 14
Août	+ 21, 01	+ 13, 71	7, 30	+ 27, 0	+ 10, 1	16, 9	9, à 3 h. s.	du 21 » 22	12, 8 » 9
Septembre . .	+ 18, 34	+ 12, 28	6, 06	+ 22, 0	+ 4, 0	18, 0	10, à midi.	du 26 » 27	9, 4 » 4
Octobre . . .	+ 12, 06	+ 7, 42	4, 64	+ 17, 0	+ 1, 0	16, 0	21, à 3 h. s.	du 28 » 29	9, 0 » 20
Novembre . .	+ 5, 99	+ 1, 68	4, 31	+ 11, 5	— 5, 7	17, 2	12, à 9 h. s.	du 17 » 18	8, 7 » 15
Décembre . .	— 2, 39	— 6, 78	4, 39	+ 5, 1	— 18, 1	23, 2	2, à midi.	du 26 » 27	8, 8 » 29
MOYENNES . .	+ 11, 82	+ 5, 15	6, 67	+ 18, 68	— 2, 08	20, 76			12, 57

Maximum absolu de l'année.	+ 32°,0
Minimum.	— 18, 1
Intervalle de l'échelle parcouru. . . .	50, 1

Le *maximum* moyen et le *minimum* moyen sont les moyennes des plus hautes et des plus basses températures observées jour par jour.
Le *maximum* absolu et le *minimum* absolu sont la plus haute et la plus basse températures qui ont été observées pendant le mois entier.

PRESSION ATMOSPHÉRIQUE.

MOIS.	HAUTEURS MOYENNES DU BAROMÈTRE, PAR MOIS. 9 HEURES du matin.	MIDI.	3 HEURES du soir.	9 HEURES du soir.	MAXIMUM absolu PAR MOIS.	MINIMUM absolu PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	DATE du MAXIMUM.	DATE du MINIMUM.
Janvier . . .	753l,65	753l,33	753l,18	753l, 82	764l, 93	742l, 66	22l, 27	31, à 9 h. s.	26, à 3 h. s.
Février . . .	61, 47	61, 34	61, 21	61, 61	76, 10	38, 84	37, 26	3, à 9 h. m.	22, à 3 h. s.
Mars.	55, 38	54, 95	54, 39	54, 78	66, 51	38, 09	28, 42	3, à 9 h. m.	31, à 3 h. s.
Avril	49, 31	49, 05	48, 69	49, 22	60, 03	38, 67	21, 36	26, à midi.	28, à 9 h. s.
Mai	59, 14	58, 82	58, 34	58, 71	64, 75	48, 03	16, 72	26, à 9 h. m.	3, à 9 h. s.
Juin	58, 52	58, 30	57, 92	58, 09	67, 02	45, 20	21, 82	11, à 9 h. m.	27, à 9 h. s.
Juillet	54, 31	54, 14	53, 92	54, 05	64, 09	46, 17	17, 92	11, à 9 h. s.	12, à 9 h. m.
Août.	55, 23	54, 99	54, 80	55, 65	64, 35	41, 96	22, 39	8, à 9 h. m.	20, à 3 h. s.
Septembre .	51, 42	51, 42	51, 23	51, 19	61, 38	36, 55	24, 83	3, à 9 h. s.	14, à 8 h. m.
Octobre . . .	58, 00	58, 11	57, 68	58, 03	69, 61	39, 40	30, 21	10, à midi.	7, à 9 h. s.
Novembre. .	58, 11	58, 03	57, 70	58, 09	69, 03	44, 86	24, 17	19, à 9 h. m.	22, à 9 h. s.
Décembre. .	62, 26	61, 98	61, 89	62, 49	73, 17	48, 45	24, 72	6, à midi.	23, à midi.
MOYENNES . .	756, 40	756, 21	755, 91	756, 31	766, 75	742, 41	24, 34		

Maximum de hauteur de l'année 776l, 10
Minimum » » 736, 55
Intervalle de l'échelle parcouru . . 39, 55

EAU TOMBÉE DU CIEL. — ÉTAT DE LA RIVIÈRE.

MOIS.	Nombre de jours de pluie, de neige ou de grêle.	Eau tombée en pouces des Pays-Bas de hauteur.	Hauteur moyenne de l'eau tombée par chaque jour de pluie, de neige ou de grêle.	HAUTEUR DE LA MEUSE, EN AUNES DES PAYS-BAS (MÈTRES). HAUTEUR MOYENNE par mois.	MAXIMUM absolu PAR MOIS.	MINIMUM absolu PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	DATE du MAXIMUM.	DATE du MINIMUM.
Janvier	17	4p,593	0p,270	+ 0a,592	+ 1a,55	— 0a,05	1a,60	31	24
Février	13	3, 348	0, 258	+ 1, 170	+ 2, 16	+ 0, 45	1, 71	24	13
Mars.	12	1, 067	0, 089	+ 0, 620	+ 1, 54	+ 0, 24	1, 30	1	30
Avril.	26	7, 304	0, 281	+ 0, 800	+ 1, 53	+ 0, 24	1, 29	30	6
Mai	8	2, 593	0, 324	+ 0, 740	+ 2, 18	+ 0, 05	2, 13	3	31
Juin	19	12, 083	0, 636	+ 0, 041	+ 0, 53	— 0, 20	0, 73	27	15 et 17
Juillet.	25	16, 060	0, 642	+ 0, 957	+ 2, 85	+ 0, 05	2, 80	21	4
Août.	23	14, 009	0, 609	+ 1, 336	+ 2, 05	+ 0, 80	1, 25	7	13
Septembre . .	24	6, 000	0, 250	+ 1, 843	+ 3, 07	+ 1, 23	1, 84	20	13
Octobre	22	6, 921	0, 315	+ 1, 617	+ 3, 20	+ 0, 86	2, 34	10	31
Novembre. . .	21	7, 514	0, 358	+ 1, 274	+ 2, 00	+ 0, 85	1, 15	16	26
Décembre. . .	11	0, 613	0, 056	+ 0, 508	+ 1, 46	— 0, 20	1, 66	1	28
	TOTAL.	TOTAL.	MOYENNE.	MOYENNE.	MOYENNE.	MOYENNE.	MOYENNE.		
	221	82p, 105	+ 0p, 341	+ 0, 958	+ 2, 010	+ 0, 360	1, 650		

Maximum absolu de l'année . . . . + 3a, 20
Minimum . . . . — 0, 20

Intervalle parcouru 3, 40

MOIS.	NOMBRE DE JOURS DE							
	PLUIE.	GRÊLE.	NEIGE.	GELÉE.	TONNERRE	BROUILLARD	CIEL entièrement COUVERT.	CIEL sans NUAGES.
Janvier	8	1	14	25	0	2	14	1
Février	10	0	6	20	0	2	7	0
Mars	10	0	4	19	0	2	5	1
Avril	25	7	1	3	2	0	2	0
Mai	8	1	0	0	1	2	0	1
Juin	19	0	0	0	5	3	1	0
Juillet	25	1	0	0	8	0	1	0
Août	23	1	0	0	2	2	0	0
Septembre	24	1	0	0	0	1	3	0
Octobre	22	0	0	1	1	1	6	0
Novembre	20	2	5	12	0	5	6	0
Décembre	0	0	11	30	0	4	4	4
TOTAUX.	194	14	41	110	19	24	49	7

MOIS.	NOMBRE DE JOURS DES VENTS DOMINANS.							
	NORD.	NORD-EST.	EST.	SUD-EST.	SUD.	SUD-OUEST	OUEST.	NORD-OUEST.
Janvier	6	4	2	0	1	6	9	3
Février	6	2	0	0	4	5	11	0
Mars	9	8	2	0	0	4	5	3
Avril	1	0	3	0	2	6	18	0
Mai	14	2	2	0	0	2	9	2
Juin	10	1	0	0	0	4	12	3
Juillet	0	0	1	0	2	15	12	1
Août	1	1	0	0	6	5	15	3
Septembre	4	1	0	0	2	2	21	0
Octobre	6	1	0	0	3	5	13	3
Novembre	2	5	1	0	3	2	15	2
Décembre	8	6	7	0	2	3	4	1
TOTAUX	67	31	18	0	25	59	144	21

Sur la convergence des séries et des produits continus, par M. Van Rees, professeur de Mathématiques à l'Université de Liége.

(1) Soit $F(x)$ une fonction inconnue de x, mais dont on connaît les valeurs pour toutes les valeurs entières et positives de x. Il est évident que ces données ne suffisent pas pour déterminer la forme de la fonction. Pour s'en assurer, on n'a qu'à chercher la courbe dont l'équation serait $y = F(x)$. Les seules ordonnées connues étant celles dont les abscisses sont les nombres entiers successifs, toute courbe passant par leurs extrémités satisfera à la question.

Par conséquent, si on considère la somme $F(x)$ d'une série, dont le terme général est donné, comme une fonction continue du nombre de termes x, le problème de la sommation des séries devient indéterminé. En effet, le terme général ne fait connaître que les valeurs particulières de $F(x)$ pour des valeurs entières de x, et n'apprend rien sur les valeurs intermédiaires.

La même considération s'applique encore au cas, où $F(x)$ désigne le produit d'un nombre indéfini de facteurs, dont on connaît la loi de succession.

(2) A cause de cette indétermination, il est permis d'établir dans ces cas une hypothèse sur les changemens de $F(x)$ et même de sa dérivée $F'(x)$ dans les intervalles entre les valeurs entières de x.

Ainsi, lorsque $F(x)$ est constamment ou croissante ou décroissante pour des valeurs entières et croissantes de x, on pourra la supposer encore telle dans les intervalles.

En outre, si la différence $F(x+1) - F(x)$ de deux valeurs successives de la fonction augmente ou diminue constamment avec x, on pourra attribuer la même propriété à sa dérivée $F'(x)$.

Comme ces hypothèses n'ont d'ailleurs aucune influence sur les valeurs que $F(x)$ reçoit lorsque x est entier, les résultats qu'on peut en déduire par rapport à la convergence des séries et des produits continus, seront entièrement rigoureux.

I. *Produits continus.*

(3) Soit

$$u_0, u_1, u_2 \ldots u_{x-1}, u_x, \text{etc.},$$

une suite de facteurs qui se succèdent d'après une certaine loi. Désignons par $F(x)$ le produit des x premiers facteurs, ensorte que

$$F(x) = u_0\, u_1\, u_2 \ldots u_{x-1}.$$

Nous supposerons que le facteur général u_x ne contient aucune fonction périodique de x, telle que sin. mx, cos. mx, $(-1)^x$ (*). Dans ce cas, les différences successives de $F(x)$ finiront nécessairement par croître ou par décroître constamment. Car puisque

$$F(x+1) = F(x).\, u_x$$

et

$$F(x+2) = F(x).\, u_x\, u_{x+1}$$

$$\frac{F(x+2)-F(x+1)}{F(x+1)-F(x)} = u_x \frac{u_{x+1}-1}{u_x-1}$$

Or, en égalant le second membre à l'unité, l'équation ainsi obtenue, et qui se réduit à

$$u_{u+1}\, u_x - 2u_x + 1 = 0,$$

(*) On sait que $(-1)^x = \cos. \pi x + \sqrt{-1} \sin. \pi x$. On peut éviter l'inconvenient qui résulte de la présence de cette quantité dans u_x, en réunissant chaque couple de facteurs consécutifs en un seul.

ne peut donner pour x qu'un nombre déterminé de valeurs réelles et finies. Donc, en désignant par λ une limite supérieure des racines de cette équation, le rapport $\frac{F(x+2)-F(x+1)}{F(x+1)-F(x)}$ des différences successives de $F(x)$ restera, à partir de $x=\lambda$, constamment supérieur ou inférieur à l'unité.

(4) Nous venons de voir (2) qu'on peut dès-lors considérer la fonction dérivée $F'(x)$, comme étant constamment croissante ou décroissante.

Or, d'après un théorème de M. *Ampère*, reproduit par M. *Cauchy* (*), le rapport aux différences finies $\frac{F(x+1)-F(x)}{(x+1)-(x)}$; qui se réduit à $F(x+1)-F(x)$, est compris entre la plus grande et la plus petite valeur que $F'(x)$ reçoit dans l'intervalle de x à $x+1$.

Donc, si $F'(x)$ est constamment décroissante, on a

$$\begin{aligned} F'(x) &> F(x+1)-F(x) \\ F'(x+1) &< F(x+1)-F(x) \end{aligned}$$

tandis que, si $F'(x)$ est croissante, ces inégalités devront être prises en sens contraire. Mais, les résultats étant semblables dans les deux cas, nous nous bonnerons aux formules ci-dessus. Si on observe que $F(x+1)=F(x)-u_x$, on trouve

$$\begin{aligned} F'(x) &> F(x).(u_x-1) \\ F'(x+1) &< F(x+1)\left(1-\frac{1}{u_x}\right) \end{aligned}$$

dont on déduit, en intégrant depuis la limite λ

$$lF(x)-lF(\lambda) > \int_\lambda (u_x-1)\,dx \qquad (a)$$

$$lF(x+1)-lF(\lambda+1) < \int_\lambda \left(1-\frac{1}{u_x}\right)dx \qquad (b)$$

(*) *Cauchy*, *Leçons sur le calcul infinitésimal*, p. 27.

Mais on a (*Cauchy*, *Calcul infinit.*, p. 92), en désignant par k un nombre compris entre les limites de l'intégrale

$$\int_\lambda \left(1-\frac{1}{u_x}\right)dx=\int\frac{(u_x-1)\,dx}{u_x}=\frac{1}{u_k}\int_\lambda(u_x-1)\,dx$$

Donc l'inégalité (*b*) devient

$$l\text{F}(x+1)-l\text{F}(\lambda+1)<\frac{1}{u_k}\int_\lambda(u_x-1)\,dx \qquad (c)$$

(5) Les quantités $l\text{F}(x)$, $l\text{F}(x+1)$, u_k sont évidemment finies. Par conséquent, si on fait $x=\infty$, il résulte des formules (*a*) et (*c*) que $l\text{F}(\infty)$, ou le logarithme du produit prolongé à l'infini, sera infini positif, fini, ou infini négatif en même temps que $\int_\lambda^\infty (u_x-1)\,dx$. D'ailleurs, la limite inférieure λ, n'influe pas sur l'espèce de valeur de cette intégrale définie, et on peut lui substituer tout autre nombre fini (plus grand toutefois que ceux qui rendraient u_x infinie). Donc :

Théorème I. *Le produit continu*

$$\text{F}(x)=u_0\ u_1\ u_2\ \ldots.\ u_{x-1},$$

dont le terme genéral u_x *ne contient aucune fonction périodique de* x, *converge, pour des valeurs infiniment croissantes de* x, *vers une limite infinie, finie ou zéro, suivant que l'intégrale* $\int(u_x-1)dx$, *prise depuis une valeur finie de* x *jusqu'à* $x=\infty$, *est infinie positive, finie, ou infinie négative.*

(6) Dans un grand nombre de cas, on peut éviter l'intégration de la formule $(u_x-1)dx$, en se servant du lemme suivant :

Soit $f(x)$ une fonction continue de x, et dont les valeurs, depuis $x=\lambda$ jusqu'à $x=\infty$, sont finies (*). L'intégrale

$$\int_\lambda^\infty \frac{f(x)dx}{x^n}$$

(*) J'entends par valeur *finie*, toute valeur différente de zéro et de l'infini.

aura une valeur finie si $n > 1$, et sera infinie si $n = 1$ ou < 1, savoir infinie positive ou négative, suivant que $f(x)$ est positive ou négative entre les limites de l'intégrale.

En effet on a, en désignant par k un nombre compris entre ces limites,

$$\int_\lambda^\infty \frac{f(x)dx}{x^n} = f(k)\int_\lambda^\infty \frac{dx}{x^n}$$

donc

$$\int_\lambda^\infty \frac{f(x)\,dx}{x^n} = \frac{f(k)}{n-1}\left(\frac{1}{\lambda^{n-1}} - \frac{1}{\infty^{n-1}}\right) \quad si\ n > 1$$

$$= f(k)\, l\left(\frac{\infty}{\lambda}\right) \quad si\ n = 1$$

$$= f(k). \frac{\infty^{1-n} - \lambda^{1-n}}{1-n} \quad si\ n < 1;$$

ce qui démontre la proposition. Si nous l'appliquons à l'intégrale comprise dans le théorème Ier, et dont la limite inférieure peut être aussi grande qu'on veut, il en résulte :

Théorème II. *Lorsque le terme général* u_x *du produit continu*

$$F(x) = u_0\ u_1\ u_2\ \ldots.\ u_{x-1}$$

est tel qu'on ait $u_{x-1} - 1 = \frac{f(x)}{x^n}$, $f(x)$ *étant une fonction continue de* x, *et qui reste finie pour* $x = \infty$, *le produit converge vers une limite finie si* $n > 1$. *Au contraire, si* $n = 1$ *ou* < 1, *cette limite sera infinie au zéro suivant que* $f(x)$ *est positive ou négative pour* $x = \infty$.

On peut prendre pour exemple le cas où $u_x = 1 + \frac{a}{x^n}$, a étant constante. Nous verrons bientôt une autre application plus générale du théorème.

II. *Séries infinies.*

(7) Soit

$$F(x) = u_0 + u_1 + u_2 \ldots. + u_{x-1}$$

la somme des x premiers termes d'une série infinie. Pour que la série soit convergente, il faut en premier lieu que le terme général u_x décroisse indéfiniment pour des valeurs croissantes de x. Ordinairement il est facile de reconnaître si cette circonstance a lieu. Mais il n'en est plus ainsi lorsque u_x se compose d'un nombre de facteurs de plus en plus grand, comme dans la série

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+\text{etc.}$$

traitée par M. *Gauss* (*Comment. Gotting. recent.*, vol. II). Les théorèmes que nous venons de trouver pour les produits continus, peuvent servir alors à simplifier cette recherche. Car, puisque

$$u_x = u_0 \frac{u_1}{u_0}\frac{u_2}{u_1} \ldots\ldots \frac{u^x}{u_{x-1}}$$

On peut considérer u_x comme un produit continu, et profiter des théorèmes I et II, en y changeant F(x) en u_x, et u_x en $\frac{u^x}{u_{x-1}}$.

(8) Supposons donc qu'on ait

$$\frac{u_x}{u_{x-1}} = \frac{x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2}\ldots + M}{x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2}\ldots + m}$$

et par conséquent

$$\frac{u_x}{u_{x-1}} - 1 = \frac{(A-a)\,x^{m-1} + (B-b)\,x^{m-2} + \ldots + M - m}{x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2}\ldots + m}$$

Si on compare cette expression avec la formule $\frac{f(x)}{x^n}$ du théorème II, on voit qu'en faisant $n=1$, $f(x)$ sera une fonction continue de x, qui se réduit à $A-a$ pour $x=\infty$. Seulement, lorsque $A-a=o$, on devra faire $n=2$, ou en général

$n > 1$. D'où l'on conclut que le terme général u_x converge vers l'infini, si $A - a > o$; qu'il a une limite finie, si $A - a = o$, et qu'enfin il décroît indéfiniment si $A - a < o$.

Pour la série indiquée ci-dessus, on a

$$\frac{u_x}{u_{x-1}} = \frac{(\alpha+x-1)(\beta+x-1)}{x(\gamma+x-1)} = \frac{x^2+(\alpha+\beta-2)x+(\alpha-1)(\beta-1)}{x^2+(\gamma-1)x}$$

donc $A = \alpha + \beta - 2$, $a = \gamma - 1$. Les termes ne décroîtront indéfiniment que lorsque $\alpha + \beta - \gamma - 1 < o$.

(9) Puisque $F(x+1) - F(x) = u_x$, le décroissement indéfini des termes de la serie, que je suppose tous positifs, s'étend aux différences successives de $F(x)$. On peut donc, dès que cette condition est vérifiée, considérer aussi la dérivée $F'(x)$ comme décroissante (2). On a ainsi

$$\begin{aligned} F'(x) &> F(x+1) - F(x) \\ F'(x+1) &< F(x+1) - F(x). \end{aligned}$$

Soit λ la valeur x, à partir de laquelle les termes décroissent constamment; si on intègre les formules précédentes depuis $x = \lambda$, après avoir substitué aux seconds membres leur valeur u_x, on a

$$F(x) - F(\lambda) > \int_\lambda u_x\,dx \qquad (d)$$

$$F(x+1) - F(\lambda+1) < \int_\lambda u_x\,dx \qquad (e)$$

Maintenant si on fait $x = \infty$, et que par rapport à la limite inférieure λ de l'intégrale, on observe ce qui a été remarqué (5), il est évident que :

Théorème III. *La série infinie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_x + \text{etc.},$$

dont tous les termes sont positifs, est convergente ou divergente,

suivant que l'intégrale $\int u_x\,dx$, *prise depuis une limite finie jusqu'à* $x=\infty$, *a une valeur finie ou infinie.*

M. *Cauchy* a donné dans ses *Exercices de mathématiques*, tom. II, p. 221, un théorème semblable, mais d'après lequel l'intégrale doit être prise entre deux limites infinies.

Faisons par exemple $u_x=\frac{1}{x(lx)}n$. On trouve que la série est convergente si $n>1$, divergente dans les autres cas.

(10) Le lemme du § 6, fournit encore la transformation suivante du théorème :

Théorème IV. *Soit* $u_x=\frac{f(x)}{x^n}$ *le terme général d'une série infinie*, f(x) *étant une fonction continue de* x, *qui reste finie pour* $x=\infty$. *La série sera convergente si* $n>1$, *et divergente si* $n=1$ *ou* $n<1$.

(11) L'emploi des théorèmes III et IV, semble borné aux cas où le terme général est donné en fonction explicite de x, ce qui les rendrait insuffisans pour la série du § 7, et à plus forte raison pour le cas plus général, que nous avons discuté au § 8, relativement à la convergence de u_x. Nous allons montrer que ce cas est encore compris dans nos théorèmes.

Rappelons d'abord les formules (a) et (b) du § 4, qui deviennent applicables au terme général d'une série infinie en changeant $F(x)$ en u_x et u_x en $\frac{u_{x-1}}{u_x}$ (7). Elles se réduisent ainsi à

$$lu_x-lu_\lambda>\int\left(\frac{u_x}{u_{x-1}}-1\right)dx \qquad (f)$$

$$lu_{x+1}-lu_{\lambda+1}<\int_\lambda\left(1-\frac{u_{x-1}}{u_x}\right)dx \qquad (g).$$

(12) Soit maintenant

$$\frac{u_x}{u_{x-1}}=\frac{x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}\ldots+M}{x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}\ldots+m}$$

et supposons $A - a$ négative, afin que u_x décroisse indéfiniment (8). On s'assure facilement que

$$\frac{u_x}{u_{x-1}} - 1 = -\frac{a-A}{x} + \frac{\varphi(x)}{x^n}$$

$$1 - \frac{u_{x-1}}{u_x} = -\frac{a-A}{x} + \frac{\psi(x)}{x^n}$$

n étant $= 2$ ou > 2, et $\varphi(x)$, $\psi(x)$ étant des fonctions de x, qui restent finies pour $x = \infty$. Si on substitue ces expressions dans (f) et (g), on a

$$lu_x - lu_\lambda > (a - A)\, l\,\frac{\lambda}{x} + \int_\lambda \frac{\varphi(x)dx}{x^n}$$

$$lu_{x+1} - lu_{\lambda+1} < (a - A)\, l\,\frac{\lambda}{x} + \int_\lambda \frac{\psi(x)dx}{x^n}$$

(13) Il résulte du lemme (b), qu'en prenant les intégrales des seconds membres jusqu'à $x = \infty$, leur valeur est finie. Donc si nous désignons par X, X_1 ces intégrales, prises jusqu'à la limite variable $x = x_1$, les fonctions X, X_1 seront finies pour $x = \infty$, et il en sera de même de e^X, e^{X_1}, e désignant la base des logarithmes népériens. Mais les formules précédentes donnent, en passant des logarithmes aux nombres :

$$u_x > u_\lambda \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{a-A} e^X$$

$$u_{x+1} < u_{\lambda+1} \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{a-A} e^{X_1}$$

par conséquent u_x est nécessairement de la forme $\frac{f(x)}{x^{a-A}}$, $f(x)$ restant finie pour $x = \infty$. Donc, en vertu du théorème IV, nous parvenons au résultat suivant :

Théorème V. *Soit*

$$\frac{u_x}{u_{x-1}} = \frac{x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + M}{x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots m}$$

l'expression générale du rapport de deux termes successifs d'une série infinie. La série sera convergente si a — A > 1, *et divergente si* a — A = 1 *ou* < 1.

Ce théorème, ainsi que celui du § 8, sont dus à M. *Gauss*, qui les a déduits de considérations différentes.

(14) Jusqu'ici nous avons supposé tous les termes de la série positifs. S'ils alternent de signe, ensorte que la série soit

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \text{etc.},$$

le décroissement indéfini des termes suffit seul pour entraîner la convergence de la série. Ce théorème est connu; cependant la démonstration qu'on en donne généralement, est loin d'être rigoureuse. En effet, puisque la série peut être écrite des deux manières suivantes,

$$u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \text{etc.}$$
$$u_0 - u_1 + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \text{etc.},$$

et que les différences $u_1 - u_2$, $u_2 - u_3$, etc., sont toutes positives, on conclut que la somme de la série est à la fois moindre que u_0 et plus grande que $u_0 - u_1$, et par conséquent finie. Mais cette conclusion suppose que les différences $(u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) +$ etc., $(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) +$ etc., forment elles-mêmes des séries convergentes, ce qui est justement le théorème à démontrer.

(15) Une démonstration plus exacte se déduit du théorème III; car en réunissant chaque couple de termes successifs en un seul, ce qui les rend tous positifs, le terme général sera $u_{2x} - u_{2x+1}$, et la convergence de la série dépendra de la valeur de l'intégrale définie

$$\int_\lambda^\infty (u_{2x} - u_{2x+1})\, dx.$$

Mais si on fait $2x + 1 = 2x'$, on trouve

$$\int_\lambda^\infty u_{2x+1}\, dx = \int_{\lambda-\frac{1}{2}}^\infty u_{2x'}\, dx'$$

le changement de la variable n'influant pas sur la limite supérieure, puisque $u_\infty = o$. Or, on peut remplacer au second membre x' par x, donc

$$\int_\lambda^\infty (u_{2x} - u_{2x+1}) dx = \int_\lambda^\infty u_{2x}\, dx - \int_{\lambda-\frac{1}{2}}^\infty u_{2x}\, dx = \int_{\lambda-\frac{1}{2}}^\lambda u_{2x}\, dx$$

quantité toujours finie, ce qui prouve la convergence de la série.

J'observe en finissant que les formules (a) et (b) du § 5, ainsi que les formules (d) et (e) du § 9, fournissent une méthode générale pour déterminer deux limites entre lesquelles se trouve la valeur d'un produit continu ou d'une série, soit qu'on les suppose prolongés à l'infini, soit qu'on les arrête à un terme quelconque.

Liége, le 6 janvier 1830.

Note sur une question de calcul d'intérêt composé, par M. R. Lobatto.

Quelqu'un recevant d'un capital une rente de a pour *un*; replace annuellement cette rente à i pour un; on trouvera qu'au bout d'un temps t, il aura accumulé une somme égale à $\frac{a}{i}[(1+i)^t - 1]$. Pour savoir maintenant quel est l'intérêt y pour un, auquel il aura fait valoir le capital dont il s'agit, on n'aura qu'à résoudre l'équation

$$\frac{a}{i}[(1+i)^t - 1] = (1+y)^t \qquad (1),$$

d'où l'on déduira immédiatement pour la valeur de l'intérêt

$$y = -1 + \sqrt[t]{\frac{a}{i}(q^t - 1)},$$

faisant pour simplifier $1 + i = q$.

On voit d'abord que l'intérêt se réduira à zéro, après un temps t, tel que $q^t - 1 = \frac{i}{a}$. Dans le cas particulier de $a = 2i$; cela arrivera lorsque le capital aura été augmenté de sa moitié. Avant cette époque l'intérêt sera négatif, puisque les rentes accumulées n'atteindront pas encore le capital. En supposant dans le même cas, que le capital soit doublé par l'accumulation des rentes, l'équation (1) se réduira à $2\,[(1+i)^t - 1] = 2$. Donc $(1+i)^t = 2$ et $y = i$. Ainsi le capital aura fructifié au même taux i, que celui auquel on accumule les rentes a.

Passé ce terme, l'intérêt y croîtra avec le montant de l'accumulation, mais ce qui pourrait paraître assez singulier au premier abord, c'est que l'intérêt y n'augmentera pas indéfiniment, mais atteindra au contraire son *maximum* au bout d'un certain temps t, dépendant des quantités a et i. En effet, en prenant $a = 10$ p. °/₀, $i = 5$ p. °/₀, on trouvera facilement pour $t = 30$, $y = 6{,}5157$ p. °/₀, et pour $t = 31$, $y = 6{,}5154$ p. °/₀, donc le *maximum* d'intérêt tombera nécessairement entre 30 et 31 ans. Après cette époque, l'intérêt diminuera insensiblement, sans cependant jamais pouvoir redevenir zéro, ni même s'abaisser au-dessous du taux i, ainsi que l'on pourra s'en convaincre par le calcul.

L'idée de ce *maximum* appartient à M. *Duvillard*, qui l'a plus amplement développée dans son intéressant ouvrage intitulé *Recherches sur les rentes, les emprunts*, etc., pag. 20, où l'on trouvera en même temps deux différentes méthodes de solution pour la détermination du temps t, correspondant au *maximum* de la quantité y.

Nous nous proposons d'indiquer ici une autre méthode pour la solution de cette question, qui nous a paru plus simple et plus directe qu'une de celles données par cet habile géomètre.

L'équation (1), après avoir posé $1 + i = q$ et $\frac{a}{i} = m$, peut être mise sous la forme suivante, qui la rendra plus propre à la différentiation :

$$\text{Log.}\, m + \log.\, (q^t - 1) = t \log.\, (1 + y);$$

en la différentiant par rapport aux variables t et y, et observant que la condition du *maximum* donne $\frac{dy}{dt} = o$, on obtiendra de suite

$$\frac{q^t \log. q}{q^t - 1} = \log. (1 + y) = \frac{1}{t} \log. m\, (q^t - 1);$$

partant

$$q^{\frac{tq^t}{q^t - 1}} = m. (q^t - 1).$$

Il s'agira donc de calculer la valeur de t, dans l'équation précédente. Pour cela, faisons d'abord pour abréger $q^t = z$, d'où résulte $t = \frac{\log. z}{\log. q}$, on aura simplement l'équation $z^{\left(\frac{z}{z-1}\right)} = m\,(z - 1)$.

La difficulté se réduit ainsi à en déduire la valeur de z.

Soit encore l'exposant $\frac{z}{z-1} = u$, ce que donnera $z = \frac{u}{u-1}$, $z - 1 = \frac{1}{u-1}$. Et en faisant les substitutions nécessaires dans l'équation en z, il viendra $\left(\frac{u}{u-1}\right)^u = m. \frac{1}{u-1}$, ou bien

$$u^u = m\,(u - 1)^{u-1}. \qquad (2)$$

Pour résoudre celle-ci, supposons qu'on aît trouvé une quantité U très-approchée de la vraie valeur u, telle que la différence $u - U = \Delta u$ soit assez petite pour pouvoir en négliger le carré; soit Δm l'accroissement également petit que subit la quantité m, pour que U puisse également satisfaire à l'équation (2). Si l'on différentie maintenant cette équation par rapport aux variables u et m, les erreurs Δu et Δm, pourront être considérées comme des différentielles, et l'on trouvera par cette opération :

$$u \log. u = \log. m + (u-1) \log. (u-1) \quad (3)$$

$$\Delta u\,(1+\log. u) = \Delta \log. m + \Delta u\,[1+\log.(u-1)]$$

donc $$\Delta u = \frac{1}{\log.\left(\frac{u}{u-1}\right)} \times \Delta \log. m.$$

Au moyen de cette formule, et d'une valeur approchée de u, on calculera facilement l'erreur Δu, puisque Δ log. m se déduit immédiatement de l'équation (3), ainsi qu'on va le voir par une application à l'exemple énoncé ci-dessus, où l'on a

$m = \frac{a}{i} = 2$ $\qquad$ $u^u = 2.\ (u-1)^{u-1}$.

On conclut d'abord que u doit être > 1 et < 2.

Prenant successivement $u = 1{,}5$; $u = 1{,}3$; $u = 1{,}2$, on trouvera sans peine par le calcul des logarithmes, appliqué à l'équation (3),

Pour	$u = 1{,}5$;	log. m = 0, 41470
	$u = 1{,}3$;	log. m = 0, 30499
	$u = 1{,}2$;	log. m = 0, 23481.

Or, puisque log. m a la valeur de log. 2 = 0, 30103, il est évident que la vraie valeur de u, tombera néccssairement entre les limites 1, 3 et 1, 2, et qu'elle sera plus proche de la première que de la seconde de ces limites.

Supposant pour un premier calcul d'approximation $u = 1,\ 3$, ce qui donne Δ log. m = 0, 00396, il viendra

$$\Delta u = \frac{0{,}00396}{\log.\left(\frac{13}{3}\right)} = \frac{0{,}00396}{0{,}636822} = 0{,}00622$$

et, comme Δu est négativè dans le cas actuel, on aura pour

une première approximation

$$u = 1,29378; \quad t = \frac{\log.\left(\frac{u}{u-1}\right)}{\log. q} = \frac{\log. u - \log.(u-1)}{\log. q}$$

$$\begin{array}{lll} & \log.\ u & = 0,\ 1119104 \\ & \log.\ u - 1 & = 9,\ 4680222 \\ \hline \log.\ u - & \log.\ (u-1) & = 0,\ 6438882. \\ \log.\ q = & \log.\ 1,05 & = 0,\ 0211893; \quad t = \dfrac{6438882}{211893} = 30,\ 39 \end{array}$$

à peu près, ce qui approche déjà beaucoup de la vraie valeur de $t = 30,38$, tandis que M. *Duvillard* n'a obtenu pour une première approximation que $t = 30,21$, et encore par un calcul très-prolixe, basé sur la théorie des suites infinies, ainsi qu'on peut le voir à l'endroit cité de son ouvrage, ou bien au Ier. vol. de la *Correspondance mathém.*, pag. 51, dans un article de M. le professeur *Garnier*.

Détermination élémentaire des formules des piles de boulets, par M. Roche, professeur à l'École Royale d'Artillerie de la Marine, à Toulon.

Les piles de boulets en usage dans l'artillerie, sont de trois espèces, savoir : *la pile triangulaire*, qui a la forme d'un tétraèdre : la *pile quadrangulaire*, qui a la forme d'une pyramide quadrangulaire dont la base est un quarré, et *la pile oblongue* ou *rectangulaire* à base rectangle, et qui a la forme d'un prisme tronqué. Toutes ces piles ont un élément commun, qui est la face triangulaire. Il convient donc de déterminer d'abord le nombre des boulets arrangés de manière à présenter la forme d'un triangle équilatéral.

Face triangulaire.

Deux faces triangulaires réunies, formeront une face en lozange si elles ont une arête commune; les deux faces comprendront ainsi un nombre de boulets exprimés par $n^2 + n$, n étant le nombre des boulets de l'arête ou côté, parce que celui du lozange est n^2; en désignant cette face par F, on aura donc $F = \frac{n^2 + n}{2}$, ou, en facteurs

$$F = n\frac{(n+1)}{2}.$$

Pile triangulaire.

Si sur une face d'une pile quadrangulaire, on applique la face semblable d'une pyramide triangulaire de même côté, on aura une pile prismatique dont les arêtes parallèles comprendront $(n+1)$ boulets; désignant par T la pile triangulaire, par Q la pile quadrangulaire, on aura $T + Q = (n+1)F$; mais deux piles triangulaires à face commune réunies, comprennent autant de boulets que la pile quarrée de même côté, vu que les deux triangles à côté commun de la double base de cette pile, contiennent autant de boulets que la base de la pile quarrée; on a donc $Q = 2T - F$ et conséquemment $3T - F = (n+1)F$ ou $3T = (n+2)F$, donc

$$T = F\left(\frac{n+2}{3}\right) = n\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n+2}{3}\right).$$

Pile quadrangulaire.

Si du double de la pile triangulaire $\frac{(2n+4)}{3}F$, nous retranchons une face F, nous aurons pour l'expression de la pile quadrangulaire

$$Q = F\left(\frac{2n+1}{3}\right) = n\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{2n+1}{3}\right).$$

Pile rectangulaire.

Désignons par R cette pile et formons sur une des faces extrêmes une pile triangulaire qui aura une face commune, et formera avec la première une pile prismatique dont l'arête parallèle sera le grand côté m du rectangle, n désignant le petit, on aura ainsi R égal à la pile prismatique qui vaudra mF moins la pile triangulaire $\frac{(n+2)}{3}$ F diminuée de la face commune F, qui vaudra alors $\frac{(n-1)}{3}$ F, ce qui donne par conséquent :

$$R = F\left[m - \left(\frac{n-1}{3}\right)\right] = n\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[m - \left(\frac{n-1}{3}\right)\right].$$

Cette pile par une décomposition différente, est donnée dans les auteurs sous la forme $R = F\frac{(3m-n+1)}{3}$, et on prescrit de la calculer en multipliant la face par le tiers de la somme des trois arêtes parallèles, mais la forme ci-dessus est bien plus commode pour le calcul; la réduction donne pour le multiplicateur de F un entier, lorsque F n'est pas divisible par 3 ou un entier plus ou moins $\frac{1}{3}$, dans le cas contraire, ce qui revient à ajouter ou retrancher d'un produit simple le tiers de F, pour avoir le nombre de boulets.

Observation.

Les relations des trois piles avec la face, sont données par les trois équations :

$$T + Q = (n+1)F, \quad 2T - Q = F, \quad R + T = (m+1)F.$$

Solution de la question proposée dans la IVe livraison du tome V de la Correspondance, par M. Roche, professeur de mathématiques, de physique et de chimie à l'École d'Artillerie de la Marine, à Toulon.

La pile hexagone est possible en ce sens, que l'on peut arranger des boulets de manière à présenter la figure d'un hexagone dont le côté contiendra un certain nombre de boulets, et que l'on peut placer les unes sur les autres des assises hexagonales de boulets dont le côté comprendra successivement un boulet de moins jusqu'au boulet du sommet. Mais cette pile ne sera pas stable par la raison que chaque boulet des assises successives ne reposera que sur un seul boulet inférieur, au lieu de reposer dans les creux formés par les boulets, comme cela a lieu dans les piles triangulaires quarrées et oblongues, les seules piles stables possibles.

La pile hexagone n'est donc possible qu'en supposant tous les boulets collés ou fixés les uns aux autres; mais dans ce cas, cette pile ne suivra plus l'analogie des piles triangulaires et quarrées, qui représentent, comme l'on sait, la somme des nombres triangulaires et quarrés; la pile hexagone ne sera pas la somme des nombres hexagones, dont le terme général est la somme des termes d'une progression arithmétique, dont le premier terme est 1 et la raison 4, et dont la somme des n premiers termes, serait $\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(4n-1)}{3}$; mais son terme général sera la somme des termes d'une progression arithmétique, dont le premier terme est o et la raison 6 (et dont conséquemment le n^e terme est $6n-6$, et la somme sera $3(n-1)n$, augmentée de l'unité, c'est-à-dire, $3n^2-3n+1$. La somme des termes de cette pile sera donc $3S_2-3S_1+n$, S_1 désignant la somme des nombres naturels et S_2 celle de leurs quarrés, ou bien si l'on représente par Q la somme des boulets de la pile quarrée, par F celle de la face triangulaire, on aura en désignant par H la pile hexagone

$$H = 3Q - 3F + n.$$

Mais on sait que $F=n\frac{(n+1)}{2}$, et $Q=n\frac{n(n+1)}{2}\frac{(2n+1)}{3}$, substituant ces valeurs et faisant la réduction, on aura

$$H=n^3,$$

d'où résulte ce théorème remarquable : *la somme des boulets d'une pile hexagone est égale au cube du nombre du côté de la base.*

Si l'on voulait former sur une base hexagone une pile de boulets solide et stable, il faudrait sur trois côtés de cet hexagone qui ne seraient ni adjacents, ni opposés, placer des plans inclinés en dehors de la base, et faisant avec l'horizon un angle dont la tangente serait égale à $2\sqrt{2}$ ou $\sqrt{8}$, c'est-à-dire, un angle égal à l'inclinaison des faces adjacentes d'un tétraèdre; on pourrait prendre trois tranches formant des triangles équilatéraux, ayant leurs côtés égaux à celui de l'hexagone; on formerait alors sur cet hexagone une pile qui ne serait autre chose que la pile triangulaire, dont la base aurait pour côté $3n-2$ (n étant celui de l'hexagone), dont on aurait retranché trois piles triangulaires du côté $n-1$. La somme de la pile totale serait $n\frac{(9n^2-9n+2)}{2}$, celles des trois piles détachées $\frac{n(n^2-1)}{2}$, et conséquemment la pile tronquée ou hexagonale que je désigne par K, aurait pour somme

$$K=\frac{8n^2-9n+3}{2},$$

cette pile à compter de l'assise qui est au-dessus des trois piles triangulaires retranchées, forme une pile triangulaire dont le côté est $2n-1$, c'est-à-dire égal à la diagonale de l'hexagone.

Note du Rédacteur. — Quoique nous ayons fait connaître dans la Ve livraison du tome V de la *Correspondance*, les réponses qui nous sont parvenues sur le problème relatif à

l'arrangement des boulets, nous n'avons pas cru faire double emploi en présentant à nos lecteurs la notice précédente, qui, par les retards qu'elle a éprouvés, ne nous a été remise que depuis peu, et qui est due à un géomètre déjà connu dans les sciences. Nous avons reçu aussi de M. *Camille Pagliani*, cadet au corps royal des pionniers, à Modène, une autre réponse qui est très-simple, et qui aurait été insérée également dans ce recueil, si elle ne rentrait dans celles que nous avons déjà fait connaître. La part que les géomètres étrangers veulent bien prendre à la solution des problèmes proposés dans la *Correspondance*, nous fait un devoir de retarder désormais l'insertion des réponses, jusqu'à ce qu'ils aient eu le temps nécessaire pour nous faire parvenir les leurs. Nous adoptons cette mesure avec d'autant plus de plaisir, que M. le comte *Coronini*, capitaine-commandant du corps royal des pionniers, à Modène, nous a fait espérer encore de nouvelles solutions de problèmes.

Étant donnés les points où trois sphères de rayons donnés touchent un plan, trouver le centre et le rayon de la sphère tangente aux trois premières et au plan; problème proposé par M. Noel, tome V, pag. 360, et résolu par M. Weiler, professeur à l'Académie militaire de Bréda.

Solution. — Parmi les huit plans tangens à trois sphères données, je ne considère d'abord que l'un des deux qui les touchent à la fois du même côté. Pour simplifier les équations, je prends ce plan pour un des plans coordonnés, par exemple, pour celui des xy, je fais passer l'axe des z par le centre de la première sphère, et le plan xz par celui de la seconde. Si r, r', r'' sont les rayons des trois sphères données, leurs centres sont déterminés respectivement par les coordonnées o, o, r; a, o, r'; a', b', r''.

Cela posé, en désignant par x, y, z les coordonnées du cen-

tre de la quatrième sphère, les conditions du problème donnent

$$(r+z)^2=(r-z)^2+x^2+y^2 \quad \text{ou bien} \quad x^2+y^2=4r^2 \quad (1)$$
$$(r'+z)^2=(r'-z)^2+(x+a)^2+y^2, \quad \text{»} \quad (x-a)^2+y^2=4r'^2 \quad (2)$$
$$(r''+z)^2=(r''-z)^2+(x-a')^2+(y-b')^2, \quad \text{»} \quad (x-a')^2+(y-b')^2=4r''^2 \quad (3)$$

équations qui appartiennent à trois paraboloïdes ayant leurs sommets aux points de contact des trois sphères avec le plan xy, et leurs foyers aux centres de ces sphères : par conséquent, le centre de la quatrième sphère se trouvera sur l'intersection commune de ces trois paraboloïdes. Or, la courbe d'intersection de deux paraboloïdes est une parabole, et deux paraboles situées dans des plans qui se coupent, ont en général deux points d'intersection ; il y a donc en général deux sphères qui satisfont aux conditions du problème.

Retranchant (2) de (1) et (3) de (1), il vient

$$2ax-4z(r-r')-a^2=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$
$$2a'x+2b'y-4z(r-r'')-a'^2-b'^2=0 \quad . \quad (5);$$

ces équations appartiennent aux plans des deux paraboles formées par l'intersection du premier avec le second et du premier avec le troisième paraboloïde. Le premier de ces plans est perpendiculaire au plan xz et passe par le milieu de la distance a. Le second passe par le milieu de la droite qui joint l'origine au point de contact de la troisième sphère avec le plan xy, et il est perpendiculaire au plan mené par cette droite perpendiculairement au plan xy.

L'élimination de la variable z entre les deux équations (4) et (5), fournit l'équation de la projection sur le plan xy de l'intersection des deux plans, c'est-à-dire, l'équation de la projection de la droite passant par les deux points d'intersection des deux paraboles, c'est-à-dire par les centres des deux sphères qui conviennent au problème. Et comme l'équation (4) est aussi celle de la projection de la même droite sur le plan xz, la position de cette droite est entièrement déterminée par ces deux équations.

L'élimination successive des inconnues x, y, z entre les équations (1), (2), et (3), donne deux valeurs pour chacune de ces inconnues; ce qui confirme l'existence des deux sphères résolvant le problème. D'ailleurs, on conçoit aisément qu'il y en a une située entre les trois sphères et le plan tangent, et une autre en dehors des trois sphères et du plan.

Si l'on fait $r = r' = r''$, on ne trouve qu'une seule valeur pour chacune des inconnues x, y, z; et, en effet, alors la quatrième sphère, située en dehors des trois sphères et du plan n'existe plus.

Si l'on suppose en outre que les trois sphères à rayons égaux soient placées à la même distance a l'une de l'autre, *c.a.d.* aux sommets d'un triangle équilatéral, on trouve pour coordonnées du centre de la quatrième sphère

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad z = \frac{a^2}{12r};$$

Ces valeurs de x et de y étaient faciles à prévoir : ce sont les coordonnées du centre du triangle équilatéral. Puisque le rayon de la quatrième sphère est toujours égal à l'ordonnée z de son centre, le rayon de cette sphère, pour le cas particulier que nous considérons maintenant, sera $\frac{a^2}{12r}$, par conséquent quatrième proportionnelle à douze fois le rayon donné et la distance commune a.

Tout ce que je viens de dire a encore lieu lorsque les trois sphères données se trouvent de l'autre côté du plan tangent; mais pour les six autres positions du plan tangent, le problème est généralement impossible, parce qu'il est généralement impossible de construire une sphère tangente à deux sphères quelconques données, lorsque ces trois sphères doivent toucher le même plan, et que le centre de la première doit être situé sur une droite perpendiculaire à ce plan. Je dis *généralement*, car il y a quelques cas particuliers faciles à distinguer, où le problème est résoluble. — Cette observation

est encore applicable au cas où les trois sphères données se trouvant du même côté du plan tangent, on voudrait que la quatrième sphère renfermât une des trois premières.

Bréda, le 12 janvier 1830.

Note du Rédacteur. — Nous regrettons que M. *Weiler* n'ait assigné la valeur du rayon de la sphère tangente aux trois autres que pour un cas très-particulier. Nous avons reçu encore une autre solution du même problème par M. *A. Meyer*, également attaché à l'école militaire de Bréda. Cette solution repose sur les procédés de la géométrie descriptive, dans laquelle l'auteur paraît très-versé, et particulièrement sur la propriété bien connue dont jouissent les surfaces du second degré, d'être le lieu des centres d'une sphère tangente à deux autres. Le nombre et la complication des figures nous ont empêché de lui donner place ici.

Sur la génération des focales, extrait d'une lettre de M. Chasles, ancien élève de l'École Polytechnique.

J'ai lu ces jours derniers, dans la sixième livraison du tome Ve de la *Correspondance*, les intéressans mémoires de MM. *Van Rees* et *Lefrançois*, sur les focales; j'en ai pris occasion pour relire, avec un nouveau plaisir, celui de M. *Dandelin*, sur le même sujet, qui se trouve dans le tome II de l'Académie. Ces courbes, dont la géométrie vous est redevable, jouissent de propriétés caractéristiques vraiment bien curieuses. J'ai compté jusqu'à huit descriptions différentes de la focale dans le cône droit.

Je me suis aperçu que les focales générales que M. *Van Rees* considère dans un cône quelconque du second degré, et qui sont aussi le lieu géométrique des points d'où l'on aperçoit sous le même angle deux droites données, admettent une troisième description également simple : *Qu'on conçoive une infinité de*

cercles ayant un même axe de symptose (ou axe radical); que d'un point fixe on leur mène des tangentes, les points de contact seront sur la focale.

Si les cercles coupent leur axe de symptose en deux points, on a la focale de troisième espèce (*fig.* 4 du Mémoire de M. *Van Rees*); P, P′ sont ces deux points; et les droites AP, AP′ sont tangentes à la courbe en ces points.

Si les cercles ne coupent point leur axe de symptose, on aura la focale de première espèce (*fig.* 1); les deux points P, P′ représentent alors deux cercles infiniment petits qui font partie de l'infinité de cercles. Chacun de ces points a, comme on sait, même polaire dans tous les cercles.

Enfin si tous les cercles se touchent en un point N, on a la focale à nœud (*fig.* 3); je vois dans le Mémoire de M. *Dandelin*, que vous avez déjà donné cette description de cette courbe.

Cette manière de former toutes les focales, au moyen d'une série de cercles, qui ont même axe de symptose, fait voir que si, par le point S (*fig.* 2, 3, 4), on mène une transversale quelconque, les deux points où elle rencontrera la courbe seront également éloignés du point A.

On en pourrait conclure aussi, par quelques considérations de géométrie, les propriétés remarquables des points *conjugués* que M. *Van Rees* a fait connaître, et diverses autres propositions. Mais je reviendrai sur ce sujet avec plus de détails, parce que j'ai reconnu que tout cela peut se déduire aussi de propriétés plus générales des courbes de troisième degré.

Chartres, le 12 février 1830.

Sur une nouvelle manière de déterminer la pesanteur spécifique des corps; par M. Lévy, lecteur à l'Université de Liége.

Il est assez difficile de dire quelque chose de nouveau sur la manière de déterminer la pesanteur spécifique des corps soli-

des; j'indiquerai néanmoins ici un procédé que je n'ai vu indiqué nulle part, et qui offre la solution d'un problème assez singulier que je m'étais proposé.

Il s'agissait de déterminer la pesanteur spécifique d'un corps solide, plongé dans l'eau, sans le sortir de ce liquide.

Pour cela, imaginons qu'à l'une des extrémités du fléau d'une balance, au lieu du plateau, soit suspendu un petit vase A, rempli d'eau jusqu'à une certaine hauteur; supposons de plus que le fond du vase ne soit qu'à une très-petite distance de la table sur laquelle la balance est placée, et qu'on puisse facilement attacher et détacher le petit vase de l'extrémité du fléau à laquelle je le suppose maintenant suspendu. A cette même extrémité du fléau est attaché un fil B très-fin, de platine, par exemple, terminé de l'autre côté par un petit crochet, et qui plonge d'une petite quantité dans l'eau du vase A, de manière que, lorsqu'on détache le vase et qu'il repose sur la table, une petite portion du fil soit encore plongée dans l'eau. Dans le vase A, plongé dans l'eau et suspendu au crochet qui termine le fil B, se trouve un petit vase C qui ne touche ni les parois latérales, ni le fond du vase A.

Cela posé, soit P le poids qui, placé dans le plateau de l'autre côté de la balance, fait équilibre au vase A, lorsqu'il est suspendu, à l'eau et au vase C qu'il contient, et enfin, au fil B; soit aussi *p* le poids qui doit remplacer P, pour faire équilibre au fil B, et au poids du vase C plongé dans l'eau, lorsqu'on a décroché le vase A de l'extrémité du fléau. Si, maintenant, on veut déterminer la pesanteur spécifique d'un corps quelconque D, on le placera dans le vase C; on suspendra le vase A, et ce qu'il faudra ajouter à P de l'autre côté sera évidemment le poids de D dans l'air; ensuite, on décrochera le vase A, on ôtera le poids P du plateau, on le remplacera par *p*, et ce qu'il faudra ajouter pour l'équilibre sera le poids de D dans l'eau. De ces deux poids, on déduira alors, comme à l'ordinaire, la pesanteur spécifique.

Cette méthode a peut-être quelques avantages sur celle que l'on emploie communément. Le principal consiste à pou-

voir répéter les deux pesées qui servent à déterminer la pesanteur spécifique autant de fois que l'on veut, sans être obligé de sécher le corps à chaque fois, comme il est nécessaire de le faire dans la méthode ordinaire, quand, après avoir posé le corps dans l'eau, on juge convenable de le repeser dans l'air.

Lettre sur les Mémoires de MM. Reiss *et* Timmerhans, *adressée au Rédacteur*, par M. Pagani, professeur extraordinaire à l'Université de Louvain.

Je viens de lire le N° I de la *Correspondance*, et je pense que les observations suivantes que cette lecture m'a suggérées, pourront offrir quelqu'intérêt aux personnes qui lisent habituellement ce qui paraît dans votre estimable journal.

Le mémoire du docteur *Reiss*, en réponse à la question que vous aviez proposée, me fournit d'abord l'occasion de présenter une simplification considérable de la formule fondamentale qui sert de base à toutes les recherches contenues dans cet écrit. A cet effet, considérons la même figure que l'auteur, et nommons ρ le rayon vecteur mené du point donné à un point quelconque de la courbe. Divisons la courbe auxiliaire en un nombre n de parties égales. La somme des rayons vecteurs, menés de manière à passer par les points de division de la courbe auxiliaire, étant désignée par $\Sigma\rho$, on aura identiquement

$$\Sigma\rho = \frac{n}{S}\Sigma\,\rho\,\frac{S}{n},$$

en dénotant par S la longueur de la courbe auxiliaire comprise entre des limites fixes. Or, en supposant n infiniment grand, on peut prendre

$$\frac{S}{n} = ds, \quad \Sigma\rho ds = \int\rho ds. \quad \text{Partant}$$

$$\frac{1}{n}\Sigma\rho = \frac{1}{S}\int\rho ds,$$

pourvu que l'intégrale du second membre soit prise entre les limites données de la courbe auxiliaire.

Relativement aux questions proposées par M. *Timmerhans*, à la fin de son mémoire *sur le centre de gravité d'un canon*; je ferai observer à l'auteur que celle de ces questions qui a pour objet l'intégrale d'une fonction irrationnelle, présente une fonction formée de deux parties, dont la première s'intègre par des arcs de cercle, et dont l'autre se rapporte aux transcendantes elliptiques; et que, par conséquent, son intégration rigoureuse n'est possible que par des séries. La seconde question n'est point susceptible de solution déterminée, en ce qu'il peut exister une infinité de lois différentes pour la densité d'un canon, sans que le centre de gravité soit placé dans des points différens. Pour s'en convaincre, il suffit de supposer qu'on ait, au lieu d'un canon, un cylindre d'une longueur et d'un diamètre donnés, et qu'on se propose de trouver la loi de la densité des différentes tranches dont le cylindre serait formé en connaissant la distance du centre de gravité du cylindre hétérogène à l'une des extrémités de son axe.

Observations sur l'aiguille aimantée, faites à Bruxelles, au mois de mars 1830; par A. Quetelet.

Je ne pense pas qu'aucune observation eût encore été faite à Bruxelles, pour déterminer l'inclinaison ou l'intensité magnétique, avant celles que j'ai publiées dans le tome V de la *Correspondance math.;* j'avoue même que je ne connais aucune observation un peu précise qui ait eu pour but de déterminer la déclinaison magnétique pour ce point si important de notre royaume : cependant la déclinaison de l'aiguille est un élément dont les arpenteurs sont dans le cas de se servir chaque jour pour orienter leurs plans. Le même manque d'observations magnétiques se fait ressentir en général pour toute la partie méridionale de notre royaume, de sorte qu'il nous est impossible de rien dire sur les variations diverses qu'a éprouvées chez nous l'aiguille aimantée, tandis que nos voisins possèdent

sur ce sujet des recueils d'observations précieuses. J'ai tâché de remplir la lacune que je viens de signaler, du moins pour Bruxelles, en attendant que je puisse le faire pour les autres points principaux de nos provinces méridionales; j'ai employé à cet effet d'excellens instrumens du célèbre artiste anglais *Troughton;* comme ces instrumens sont déposés à l'observatoire, j'aurai l'avantage de pouvoir comparer annuellement les résultats de mes observations.

J'avais trouvé, dans le jardin de l'observatoire, au mois d'octobre 1828, que l'aiguille aimantée formait avec le méridien un angle de 22° 28′ 51″,1; cette déclinaison n'avait pas sensiblement changé au mois de mars de l'année dernière. En reprenant une nouvelle série d'observations, le 5 mars dernier encore, entre 1 et 2 heures, j'ai trouvé une déclinaison moyenne de 22° 25′ 18″,1, ce qui semblerait annoncer une diminution dans la déclinaison de l'aiguille, conforme à celle qu'on observe également ailleurs.

Le manque d'un local convenable, à l'observatoire, ne m'a pas permis de suivre la variation diurne de l'aiguille que j'avais trouvée en septembre 1828, de 8 à 9 minutes, et de 11′ 25″ le 26 du même mois.

L'inclinaison de l'aiguille était de 68° 56′,5 vers la fin de 1828; je l'ai trouvée de 68° 52′,5 et 68° 52′,7 le 4 et 5 de ce mois, vers 3 heures de l'après-midi. Cette diminution de l'inclinaison s'accorde avec les observations du célèbre *Humboldt*, qui estime que la diminution annuelle pour Paris, Berlin, et quelques autres points remarquables, a été de 2 à 3 minutes environ.

Quant à l'intensité magnétique (voyez pag. 66 de ce vol.), en prenant pour unité celle qui a lieu sous l'équateur magnétique, M. le capitaine *Sabine* a trouvé, avec les aiguilles qui lui ont servi dans ses voyages, le 5 novembre 1828, dans le jardin de l'observatoire, une valeur de 1,3381; j'ai trouvé au même lieu, en 1829, une intensité représentée par le nombre 1,3491, valeur un peu plus grande que celle qui a été obtenue pour Paris.

Observations sur la forme et la densité de la neige, faites à Bruxelles, pendant l'hiver de 1829 *à* 1830, par A. QUETELET.

Pendant le siècle dernier, différens physiciens se sont occupés de la détermination de la densité de la neige, et les résultats qu'ils ont obtenus varient dans des limites assez grandes, comme on peut le voir dans l'*Introductio ad philosophiam naturalem*, de *Musschenbroek*. *Sedileau* avait trouvé que généralement la neige en se fondant, se réduisait à un volume 5 à 6 fois moindre. *La Hire*, en confirmant cette observation, ajoutait qu'en 1711, il avait observé une neige qui s'était réduite au 12ᵉ de son volume, en passant à l'état liquide. *Musschenbroek* assure avoir vu de son côté à Utrecht, une neige de forme régulière qui était 20 fois plus légère que l'eau. Depuis les recherches de ces physiciens, je ne sache pas qu'on se soit encore occupé d'observations sur la densité de la neige; on paraît aussi s'être moins occupé de l'examen des formes régulières qu'elle affecte en tombant. On a remarqué généralement que cette forme était hexagonale, mais qu'elle présente des variétés très-remarquables. *Musschenbroek*, dans son *Introductio*, a représenté 26 formes différentes; dans ces derniers temps, le voyageur *Scoresby* en a figuré jusqu'à 48.

Le but que j'ai eu en recueillant de nouvelles observations sur la forme et la densité de la neige, a été plus particulièrement d'examiner s'il n'existait pas de relations entre l'une et l'autre de ces deux choses. Dans cette vue, j'ai commencé une série d'observations, dont je présente ici les premiers résultats. Je dois faire observer que la manière même dont on recueille la neige, exige les plus grandes précautions pour empêcher la condensation d'avoir lieu. Quelquefois aussi, une quantité assez grande de neige peut se fondre sans qu'on s'en aperçoive; parce que l'eau qui provient de cette fusion, se loge dans les interstices que présente la neige, et augmente ainsi considérablement sa pesanteur spécifique. Dans le ta-

bleau que je présente, j'ai pris pour unité le volume d'eau provenant de la fusion de la neige, ainsi la pesanteur spécifique sera l'unité divisée par le nombre de la seconde colonne; les figures sont indiquées d'après l'ouvrage de *Musschenbroek*.

DATES DES OBSERVATIONS.	TEMPÉRATURE moyenne(*).	VOLUME DE LA NEIGE.	FORMES DE LA NEIGE.
25 novemb. 1829. .	+ 0,5	5,60	Flocons informes.
16 décembre	0,0	7,00	Neige fine sans forme déterminée.
19 »	— 0,8	7,50	
20 »	— 1,5	14,00	Figures 7 et 17.
21 »	— 1,0	8,13	Informe.
24 »	— 4,0	6,16	»
25 »	— 4,5	7,78	Figures 5 et 7.
10 janvier 1830. . .	+ 1,0	2,80	La neige fond en tombant.
12 »	— 1,3	10,00	Figure 7, très-petites étoiles.
13 »	— 3,3	10,00	» »
15 »	— 6,0	12,00	» »
6 février.	—10,0 (**)	8,80	Figues 3, 4, 5, 7, 12, 13 et 17 (***).
17 »	+ 0,3		Gros flocons qui fondent. On reconnaît les figures 6 et 7.

Sur la constance qu'on observe dans le nombre des crimes qui se commettent.

« L'on passe d'une année à l'autre, avec la triste perspective de voir les mêmes crimes se reproduire dans le même ordre, et attirer les mêmes peines dans les mêmes proportions... Mais gardons-nous cependant de croire, s'il n'est pas en notre pouvoir d'arrêter brusquement le mal, qu'il soit impossible

(*) La température moyenne, échelle de Réaumur, est prise d'après les observations que M. *Kickx* a eu l'obligeance de me communiquer.

(**) Le thermomètre de Réaumur est descendu les jours précédens jusqu'à 12° 5.

(***) La neige présentait ce jour une grande diversité de formes; quelques étoiles hexagonales étaient aussi agglomérées d'une manière régulière. Plusieurs de ces formes ont été reproduites dans la *Revue des Revues* de Bruxelles.

d'y remédier entièrement ; » telles sont les observations que nous répétions encore dans le IVe volume de la *Correspondance*, en parlant du nombre des crimes et des délits dans les cinq provinces qui sont du ressort de la cour de Bruxelles. Ces conjectures qui ont paru sinistres à biens des gens, se déduisent sans peine, d'après les premières notions des probabilités, des documens que nous fournit la statistique. Nous avouons néanmoins que les réclamations qu'elles ont excitées chez quelques personnes, très-respectables d'ailleurs, ont éveillé chez nous une défiance extrême ; et en recevant le nouveau *compte général de la justice criminelle en France*, nous n'avons eu rien de plus pressé que de vérifier nos conjectures, comme s'il se fût agi d'une prophétie dont nous devions compte. Or, voici ce que nous avons lu dès les premières pages ; nous nous bornons à copier les nombres tels qu'ils s'y trouvent présentés :

Condamnations prononcées en France de 1825 *à* 1828.

	1825.	1826.	1827.	1828.
Condamnés à mort	134	150	109	114
» aux travaux forcés à perpétuité	283	281	317	268
» » à temps	1052	1139	1062	1142
» à la réclusion	1162	1228	1223	1223
» au carcan	6	5	5	11
» au bannissement	1	1	0	1
» à la dégradation civique	2	1	6	0
» à des peines correctionnelles	1342	1487	1446	1739
Accusés âgés de moins de 16 ans, condamnés à rester détenus dans une maison de correction	57	56	68	53
TOTAUX	4037	4348	4236	4551

Proportion des acquittés.

	1825.	1826.	1827.	1828.
Sur le total des accusés	0,39	0,38	0,39	0,39
Dans les crimes contre les personnes	0,54	0,49	0,50	0,53
Dans les crimes contre les propriétés	0,34	0,33	0,35	0,34

Condamnés à des peines infamantes.

	1825.	1826.	1827.	1828.
Sur tous les accusés	0,40	0,40	0,39	0,37
Crimes contre les personnes	0,26	0,30	0,29	0,27
Crimes contre les propriétés	0,45	0,44	0,43	0,41

Condamnés à des peines correctionnelles.

	1825.	1826.	1827.	1828.
Sur tous les accusés	0,21	0,22	0,22	0,24
Crimes contre les personnes	0,21	0,21	0,21	0,20
Crimes contre les propriétés	0,21	0,23	0,22	0,25

On peut juger maintenant si nous étions loin de la vérité, et si les différens genres de condamnations ne se sont pas présentés à peu près exactement dans le même nombre, et si la proportion des peines n'a pas été la même. On aura aussi remarqué que les acquittemens pour les crimes contre les personnes sont bien plus nombreux que pour les crimes contre les propriétés, quand il s'agit de peines graves; sans doute, comme nous le disions, pour tempérer la sévérité des lois qui, souvent, restent sans effet par un excès de rigueur. Quoique la colonne pour 1829, ne soit point encore remplie, les quatre colonnes qui précèdent ne font déjà que trop entrevoir les nombres qui doivent y figurer un jour.

Nous venons de voir quelles ont été les condamnations; voici les nombres des individus qui ont paru devant les tribunaux :

	1825.	1826.	1827.	1828.
Accusés criminels	7816	7591	7774	7396
Prévénus correctionnels	141733	159740	171146	172300
Jugemens en simple police	101155	100551	88833	95589
Totaux	252529	269708	269580	277113

Nous reviendrons, dans un autre article, sur ce qui concerne les âges; cette partie n'est pas une des moins remarquables du *compte général de l'administration de la justice en France.* On appréciera mieux de jour en jour l'utilité que présente cet ouvrage et les leçons instructives qu'on peut y puiser. L'époque n'est pas loin, sans doute, où l'on s'étonnera avec raison que les plus simples conséquences que l'on en dé

duit, peuvent rencontrer tant d'opposition et de méfiance. Mais on dira peut-être alors qu'il était plus facile d'indiquer le mal que d'y trouver un remède, tant on est encore généralement porté à nier les avantages que présente l'étude de la statistique.

Académie Royale des sciences et belles lettres.

Séance du 6 février. — Le secrétaire donne lecture d'une lettre de M. *Schumacher*, directeur de l'observatoire d'Altona, et d'une autre de l'Académie royale de médecine de Paris, qui propose un échange des volumes des Mémoires : il présente ensuite les réponses qui sont parvenues aux questions que l'Académie avait mises au concours. Les mémoires sont au nombre de onze ; savoir : 6 pour l'histoire, 3 sur la question géologique concernant la province de Liége, et 2 sur les mathématiques. On nomme des commissaires pour les examiner. —M. *Dumortier* annonce qu'on vient de trouver une vingtaine de manuscrits qui avaient été déposés, dans une armoire masquée, sous l'escalier de la bibliothéque du chapitre de Tournai. L'un de ces manuscrits contient les procès verbaux de 52 réunions d'une société de Rhétorique, tenues depuis le 1er mai 1477 jusqu'au 1er juin 1491 ; chaque procès verbal renferme différentes pièces de poésie. Un autre manuscrit est l'*Historia Tornacensis*, de *Sanderus*. M. *Van Hulthem* présent à la séance, annonce que le hasard l'a rendu possesseur des planches in-4° qui manquent au manuscrit. — M. *Dumortier* lit aussi la 1re partie d'un mémoire sur la *carpographie* ou essai de classification des fruits. Il est fait un rapport favorable sur le mémoire de M. *Van Rees*, inséré dans ce numéro. — M. *De Reiffenberg* termine la séance par la lecture d'une notice sur le manuscrit de la bibliothéque de Bourgogne, intitulé *La fleur des histoires*.

Séance du 6 mars. — M. *Dewez* communique une lettre de M. *Encke*, directeur de l'observatoire de Berlin, et présente

deux exemplaires d'un mémoire de M. *Al. De Humboldt*, sur les signes mathématiques chez les indiens. Il est aussi donné lecture d'une lettre de M. *Bernardi*, bibliothécaire à Louvain. — M. *Marchal* présente deux mémoires manuscrits de l'abbé *Mann*, sur les canaux de la Belgique et sur les ports d'Ostende et de Nieuport. — M. *Quetelet* présente au nom de M. *Chasles*, un mémoire de géométrie pure, sur les propriétes générales des cônes du second degré; et, au nom de M. le docteur *Reiss*, un mémoire sur les propriétés du tétraèdre; il lit ensuite une note sur ses observations relatives à l'aiguille manégtique (voyez pag. 211). Il est fait un rapport très-favorable sur le mémoire que M. *Lévy* à présenté à l'une des séances précédentes. — M. *De Reiffenberg* lit un éloge historique sur l'abbé *Mann*.

Correspondance et Annonces scientifiques.

Nous venons de recevoir de M. le docteur *Julius*, quelques détails sur la mort prématurée du célèbre artiste *Repsold*, dont nous avons eu occasion d'entretenir nos lecteurs à propos de l'observatoire de Hambourg, voyez le n° précédent. M. *Repsold*, en sa qualité d'ingénieur expérimenté, avait été nommé maître des incendies, poste important dans une ville où le feu peut occasionner les plus terribles ravages. C'est en exerçant ses dangereuses fonctions, avec un zèle et un courage dignes d'un meilleur sort, qu'il vient de succomber dans un âge encore peu avancé.

« La mort inattendue de notre excellent ami *Repsold*, vous aura frappé sans doute comme nous tous. Il dînait chez un de ses amis (chez M. *Schumacher*), lorsqu'on vint lui annoncer, à 6 heures du soir, qu'il y avait un incendie. Il s'y rend tout de suite, et se met comme à l'ordinaire à la tête de nos courageux pompiers, lorsqu'une poutre enflammée tombe d'un toit et lui fracasse la poitrine. Le visage seul est resté intact; il a re-

tenu, même après sa mort, le doux et intelligent sourire qui y résidait. La moitié de Hambourg et tous les magistrats ont suivi la pompe funèbre. On va lui ériger un monument près de l'observatoire, et une médaille sera frappée à sa mémoire. Quoiqu'il n'aimât pas ces honneurs publics, l'enthousiasme est trop général pour le retenir. Des pensions n'existent pas dans notre petite république; une souscription a été ouverte, et sa veuve recevra une rente viagère jusqu'à sa mort, et ses huit enfans jusqu'à leur établissement ou leur mariage.... »

Peut-être sera-t-on charmé d'avoir quelques renseignemens particuliers sur cet homme recommandable à plus d'un titre. M. *Repsold* était maigre, d'une taille assez élevée; ses yeux étaient pleins de feu, et son sourire plein de finesse; ses manières un peu brusques, et son langage peu fait aux complimens, annonçaient un caractère franc et loyal. Quand il se livrait aux plaisirs de la conversation, ses traits exprimaient la bienveillance; sa bonhomie était celle du respectable *Trougthon*; elle s'alliait à un peu de malice, mais sans jamais blesser personne. Il était d'une activité incroyable, et supportait les retards avec impatience. Je me rappelle qu'à notre retour de Brême, où nous avions été visiter l'illustre *Olbers*, avec son ami intime M. le professeur *Schumacher*, nous fûmes arrêtés quelque temps à Harbourg, pendant qu'on nous préparait un bateau pour le passage de l'Elbe. Fatigué de tous ces apprêts, M. *Repsold* vint nous dire qu'il avait trouvé un canot léger, et qu'on lui avait promis qu'avant une heure, il pouvait être rendu à Hambourg, où il avait encore quelques occupations à terminer pendant la soirée; il partit en effet malgré nos instances pour le retenir. Mais quand nous nous trouvâmes à notre tour en face de Hambourg, nous fûmes témoins d'un terrible incendie qui avait éclaté dans une partie de la ville opposée à celle qu'il habitait. « Je me trompe fort, me dit alors M. *Schumacher*, où notre ami ne finira pas ses occupations ce soir; car voilà de la besogne plus pressante qui l'attend, » et effectivement, nous apprîmes en débarquant, qu'avant même d'être rentré chez lui, il s'était rendu au lieu de l'incendie. M. *Rep-*

sold aimait les plaisanteries et se prêtait de la meilleure grâce à celles qu'on lui faisait; je me rappelle qu'il riait de tout son cœur, lorsque M. *Schumacher* me racontait en sa présence la manière dont il s'y prenait pour se procurer des fils d'araignée très-fins. Elle est assez remarquable en effet. Quand l'insecte était las de filer, M. *Repsold* l'excitait, et, en le frappant de petits coups, le forçait de continuer, comme à regret, un fil qui devenait d'une minceur extrême. Il est fâcheux que cet artiste habile ait laissé si peu d'instrumens; le devoir qu'il s'était imposé de les construire de sa propre main, fait qu'ils sont extrêmement rares. M. *Schumacher* a recueilli dans son excellent journal, les observations astronomiques que M. *Repsold* a faites à l'observatoire de Hambourg. Il paraît même que ce monument a été construit comme un hommage que cette ville éclairée avait voulu faire au grand artiste qui s'était fixé dans ses murs (*). M. *Repsold* était d'un grand désintéressement, d'une probité à toute épreuve, et sa modestie n'était pas moindre que son talent; mais il était modeste comme un homme qui connaît la dignité de son art, et qui supporte impatiemment la critique injuste de la médiocrité.

— M. *Brandès*, professeur à l'Université de Leipsig, se propose de publier des leçons sur la physique, destinées particulièrement aux personnes à qui les connaissances mathématiques sont moins familières : cet ouvrage intitulé : *Vorlesungen über die naturlehre*, paraîtra par souscription en 3 vol., chez *G.-J. Gôschen*, à Leipsig. Le prix du volume est de 2 thaler 8 gr. (environ 9 francs). M. *Brandès* est avantageusement connu depuis long-temps par un grand nombre d'ouvrages sur la physique et les mathématiques. Ce savant nous parle, dans une de ses dernières lettres, d'expériences très-intéressantes qu'il

(*) M. *Repsold* était né dans le Hanovre; il est remarquable que ce pays ait vu naître les trois astronomes *Herschel*, *Olbers* et *Harding*, à qui l'on doit la découverte de quatre des cinq planètes qui ont enrichi l'astronomie moderne.

vient de faire sur les plaques vibrantes, et qui tendent à compléter les recherches de *Chladni*, de *Savart* et des autres physiciens qui se sont occupés du même objet.

— Nous avons reçu une lettre de M. *Encke*, dans laquelle ce célèbre astronome nous recommande beaucoup la méthode de *Bessel*, pour la détermination de la hauteur du pôle ; il en a déduit, pour la latitude de Berlin, 52° 31′ 13″. Quant à la longitude en temps, il la fait de 44′ 14″, au lieu de 44′ 8″ que donne la *Connaissance des temps*. M. *Encke* paraît également convaincu de l'excellence de la compensation à mercure. Une pendule qui avait une marche très-défectueuse avec une compensation métallique, a pris une marche régulière depuis qu'on y a appliqué l'autre genre de compensation.

— Les travaux de l'observatoire de Bruxelles ont repris depuis peu. Les ouvrages en maçonnerie sont terminés ; et tout porte à espérer que les instrumens pourront enfin être mis en place vers la fin de l'été.

— M. *Hachette*, à qui les sciences doivent un grand nombre d'ouvrages utiles, vient encore de publier une *Histoire des machines à vapeur, depuis leur origine jusqu'à nos jours* (à Paris chez le libraire *Corby*) Cet ouvrage doit inspirer un vif intérêt dans un moment où l'on s'occupe d'examiner les titres que les différentes nations apportent à l'invention des machines à vapeur, et où chaque jour nous fait connaître de nouveaux avantages que l'on peut retirer de cette importante découverte. Déjà les intéressantes notices que M. *Arago* a insérées dans l'*Annuaire du bureau des longitudes*, avaient attiré l'attention publique sur une question délicate, puisqu'elle concerne l'amour-propre des nations, tout aussi intraitable que celui des individus. Les recherches nombreuses et impartiales de M. *Hachette* fourniront des documens précieux qui aideront à porter un jugement définitif.

— Nous avons reçu d'Utrecht une dissertation écrite en latin, par M. *P. Van Galen*, *Sur le pendule et ses applications, pour déterminer la figure de la terre*, et défendue par l'auteur, à l'occasion de sa promotion au grade de docteur. Cet ouvrage

est un résumé substantiel de tout ce qu'on pouvait dire sur ce sujet. L'auteur présente d'abord une introduction historique, dans laquelle il expose les travaux des physiciens sur ce qui concerne les observations du pendule. Il fait connaître ensuite la théorie mathématique du pendule et les méthodes employées par les modernes, pour déterminer sa longueur, telles que la méthode de *Borda* et de *Biot*, celle du capitaine *Kater* et celle de *Bessel*; il examine aussi les corrections et les réductions qu'il convient d'apporter aux résultats des expériences, afin de les rendre comparables, comme la correction de l'amplitude, celle de la dilatation pour les variations de température, celle de la réduction au vide, et enfin celle de la réduction au niveau de la mer. Le troisième et dernier chapitre traite de l'application du pendule à la détermination de la figure de la terre; l'auteur a présenté encore, dans trois tableaux, les résultats numériques déduits, par la méthode des moindres carrés, des observations de *Bougner*, *La Condamine*, *Duperrey*, *Freycinet*, *Kater*, *Sabine* (*), etc. Ce travail est le fruit d'excellentes études et de pénibles recherches; il fournirait un puissant argument en faveur de l'obligation imposée aux récipiendaires de présenter une dissertation écrite pour l'obtention du grade de docteur, si l'on était toujours sûr d'avoir des mémoire rédigés d'une manière aussi consciencieuse.

— Le célèbre naturaliste de *Sœmmerring*, vient de mourir à Francfort, dans un âge assez avancé, quoiqu'il eût encore conservé beaucoup de force, et presque toute la vivacité de la jeunesse. Ce vieillard n'était pas moins respectable par son profond savoir que par ses vertus.

(*) Nous possédons maintenant à l'observatoire de Bruxelles le pendule avec lequel M. le capitaine *Sabine* a fait ses dernières expériences à Greenwich et à Londres, Portland-Place, où j'ai eu l'avantage d'observer avec ce savant. Jusqu'à présent, les travaux de notre observatoire n'ont pas permis de faire les dispositions nécessaires pour le placement et l'observation de cet instrument. M. le professeur *Moll*, promoteur de M. *Van Galen*, se propose également de faire, à Utrecht, les observations du pendule, avec un instrument construit d'après la méthode du capitaine *Kater*.

— Il a paru à Leipsig, en 1829, sous le titre *Die zeitrechnung des menschlichen lebens*, par *F. Burdach*, un opuscule in-12, qui renferme des rapprochemens très-curieux sur la mortalité et sur les périodes de la vie humaine. L'auteur, qui est un phisiologiste connu, partage la vie en dix périodes de 400 semaines chacune, et il trouve ainsi l'âge des dents de lait, celui de l'adolescence, celui de la jeunesse, etc.; dans la première période, s'en trouve une autre secondaire de 40 semaines, l'âge de l'allaitement.

— En terminant l'impression de ce numéro de la *Correspondance*, nous avons reçu de Louvain une réponse de M. *Steichen*, à la question sur le contact des sphères; cette réponse est semblable à celle qui est présentée plus haut, et repose aussi sur la propriété connue des surfaces du second degré, d'être le lieu du centre d'une sphère tangente à deux autres sphères données. Nous regrettons que l'auteur ait également négligé de déterminer le rayon de la sphère tangente.

— M. *Noël*, en nous faisant parvenir les deux problèmes suivans, observe qu'on doit les considérer tout simplement comme des problèmes de géométrie numérique. Ces questions, nous écrit ce professeur distingué, peuvent exiger quelqu'attention pour la mise en équation et l'élimination des inconnues; j'ai cru qu'elles ne seraient pas sans intérêt, bien que les problèmes généraux puissent être connus.

QUESTIONS.

Deux menuisiers ont à se partager en deux portions équivalentes, un prisme triangulaire tronqué d'ébène, dont la plus petite face latérale surpasse la plus grande des deux bases. Ils demandent de quelle manière ils doivent les scier, pour que

la section qui opérera le partage, soit la plus petite possible.

Même problème pour un parallélipipède tronqué d'ébène. Même problème encore pour un prisme oblique à bases régulières. Même problème enfin pour un prisme tronqué quelconque (la solution exige évidemment qu'on ait le moyen de tracer le contour de la section *minimum*).

Mannheim.

40 60

Lit

Notes extraites d'un voyage scientifique en Allemagne.

IIIe ARTICLE.

Duché de Hesse-Cassel; Francfort.

Cassel, où je me rendis ensuite, fut loin de me présenter le même intérêt que les autres villes que je venais de quitter. Je fus plus content de son théâtre et des beautés de Wilhemshöhe, où l'on trouve des jets d'eau et des cascades admirables, que des établissemens scientifiques. Je dois cependant en excepter la bibliothéque qui est confiée aux soins d'un homme de mérite. L'observatoire qu'on vient d'arranger et de repeindre à neuf, est un bâtiment de peu d'importance pour l'astronomie; il renferme quelques vieux instrumens en assez mauvais état, qui sont plutôt propres à satisfaire les curieux qui vont prendre du haut de la terrasse une idée des environs, qu'à faire des observations utiles à la science. C'est une grande tour carrée bâtie au milieu de la ville; la construction qui fut ordonnée en 1777, ne fut terminée que trois à quatre ans après, comme on peut le voir par les lettres adressées à M. *Bernouilli*, par le directeur M. *Matsko* (*Annuaire de Bode*, an. 1780 et 1783). Cet astronome y parle avec chagrin de l'obstination avec laquelle l'architecte semble avoir contrarié ses vues. Le passage est assez remarquable pour trouver place ici (*). « Je doute en-

(*) *Ich zweifele aber zur zeit noch sehr, ob es in der vollkommenheit, in welcher ich es zu sehen wünsche, und dazu ich den vorschlag Höchsten orts eingegeben habe, wird aufgefürht werden. Der Baumeister, der den bau dirigirt, hat das observatorium zu Bologna gesehen, und dürfte zich vielleicht überzeugt halten, das zur aufführung eines solchen gebaudes Weiter nichts erfordert werde, als eines gesehen zu haben. Ich will jetzt noch das beste hoffen; allein es hält sehr schwer, wie Ew. aus der erfahrung bekannt seyn wird, leuten die nichts von der astronomie verstehen, begreiflich zu machen einem astronomen sey in den mehrensten fällen an einer sec. so viel gelegen*, etc.

core, dit-il, s'il sera construit avec la perfection que je voudrais lui voir et selon le plan que j'ai soumis au gouvernement. L'architecte qui dirige les travaux, a vu l'observatoire de Bologne, et il s'est persuadé sans doute que cela suffisait pour construire un semblable édifice. Du reste, je veux espérer encore que les choses tourneront au mieux; mais il est bien difficile, comme vous devez en avoir l'expérience, que des gens qui n'entendent rien à l'astronomie, conçoivent que des astronomes attachent tant de prix à une seconde, etc. » D'autres astronomes ont éprouvé des contrariétés semblables; et particulièrement le célèbre *Cassini*, dont tout le crédit ne put l'emporter sur celui de l'architecte, lors de la construction de l'observatoire de Paris. *Delambre*. *Hist. de l'astr. mod.*, t. II, p. 692.

Je fis le voyage de Cassel à Francfort avec M. *Rolin*, jeune docteur de nos compatriotes, que j'avais déjà eu le plaisir de rencontrer à Berlin, où il est pensionnaire de notre gouvernement, et où il reçoit des savans un accueil bien mérité par ses connaissances et sa modestie. Je fis encore à Heidelberg une rencontre semblable d'un jeune docteur en lettres. Les voyages scientifiques accordés comme récompenses, sont de puissans moyens d'encouragement qu'on ne saurait trop louer: les autres gouvernemens en ont aussi reconnu l'utilité et n'ont pas négligé d'en faire usage.

J'avais eu l'espoir, en arrivant à Francfort, de faire la connaissance du célèbre baron *De Zach*, dont les travaux nombreux ont été si utiles à l'astronomie; malheureusement il se trouvait à Paris pour des motifs de santé. M. le baron *De Lindenau* se disposait également à partir pour Dresde, et je n'eus le plaisir de le voir que pendant quelques instans. J'ai emporté toutefois l'espérance de le revoir à Bruxelles, où j'eus l'honneur de faire sa connaissance pendant le séjour qu'il fit dans cette ville en 1827, en qualité d'envoyé extraordinaire de la Saxe auprès de notre gouvernement. M. *De Lindenau* a construit récemment à Francfort, un gnomon pour aider à régler les horloges; ce service rendu avec autant de zèle que de complaisance, lui sera un nouveau titre à la reconnaissance de cette ville.

Parmi les personnes qui se livrent à Francfort à des recherches astronomiques, je ne dois pas omettre de citer le célèbre physiologiste *De Sœmmerring*, qui s'est beaucoup occupé dans ces derniers temps de l'observation des taches du soleil. Ce vénérable vieillard a recueilli depuis plusieurs années, avec une extrême persévérance, toutes les configurations et les phases qu'ont présentées les différentes taches qui ont été vues à la surface du soleil, et il les a consignées dans une série de dessins très-remarquables par leur exécution. Déjà les observations d'une même tache qui s'est reproduite pendant le cours de 1825 et 1826, ont été discutées et calculées par M. le professeur *Thilo*, dont le mémoire a été publié à l'occasion du 50e anniversaire de l'obtention du grade de docteur en médecine, par M. *De Sœmmerring* (*). On y trouve la remarque curieuse et faite, je pense, pour la première fois, que généralement les taches forment sur le disque solaire deux bandes entre lesquelles passe l'équateur de cet astre; ce qui résulte autant des observations de M. *De Sœmmerring*, que de celles faites antérieurement par *Scheiner*, *Schrœter*, *Hévélius*, etc. Ainsi, quand on suppose trois bandes également larges, à la surface du soleil, dont celle située dans la partie australe, s'étend du 19e jusqu'au 4e degré, celle du milieu du 4e jusqu'au 11e degré boréal, et la troisième bande du 11e degré jusqu'au 26e, on compte, d'après *Scheiner* :

Dans la bande australe	70 à 71	taches,
— du milieu	8 à 9	
— boréale	42 à 43.	

Les instrumens dont se sert M. *De Sœmmerring*, sont deux lunettes achromatiques de *Fraunhofer;* l'une de 34 lignes d'ouverture et d'une distance focale de 42 pouces, à laquelle on adapte un grossissement de 84 fois; l'autre de 52 lignes d'ouverture et d'une distance focale de 72 pouces, avec un grossissement de 216 ou de 324 fois.

(*) Ce mémoire, écrit en latin, a été publié à Francfort, in-4°, 1828, par la société des Naturalistes de cette ville.

C'est dans le jardin de M. *De Sœmmerring* que M. *De Humboldt* a observé, en 1826, l'inclinaison de l'aiguille magnétique qu'il a trouvée de 67°52′. M. *De Sœmmerring* a bien voulu me permettre obligeamment de faire au même lieu mes observations sur l'intensité magnétique, et me présenter toutes les facilités désirables pour cet objet.

Francfort renferme plusieurs collections publiques pour les beaux arts et les sciences ; on peut voir aussi un beau cabinet d'instrumens de physique, chez M. *Albert*, dont le fils est un jeune artiste instruit, et qui exécute avec intelligence les appareils divers qui lui sont demandés. J'ai fait aussi dans la famille de M. le docteur *Reiss*, jeune savant, actuellement fixé à Bruxelles, la connaissance de plusieurs personnes instruites, parmi lesquelles je citerai M. le docteur *Creiznach*, à qui l'on doit quelques ouvrages mathématiques, et entre autres une traduction allemande de la théorie des nombres de *Legendre*.

Heidelberg, *réunion des Naturalistes allemands*.

J'avais pris mes arrangemens de voyage de manière à pouvoir assister à la réunion des naturalistes allemands, qui devait avoir lieu à Heidelberg, à partir du 18 septembre. On avait eu soin de procurer d'avance des logemens aux savans étrangers qui avaient prévenu le président de leur arrivée ; et des personnes avaient été placées aux portes de la ville, pour leur donner les indications nécessaires, à mesure qu'ils se présentaient. Comme les auberges de Heidelberg n'auraient pas été suffisantes, on avait disposé encore de plusieurs maisons particulières. Grâce à ces soins et à l'obligeance que montrèrent constamment les directeurs de la fête ; tout se passa de la manière la plus satisfaisante.

On avait fait dans l'intérieur du bâtiment de l'université les dispositions nécessaires pour la réunion. On avait aussi senti la nécessité, comme à Berlin, de former indépendamment des séances générales, des assemblées par section, où les savans réunis d'après la nature de leurs études, pouvaient plus facile-

ment faire un échange de leurs idées et descendre à de petits détails particuliers qui auraient été déplacés dans des lectures faites en présence de plusieurs centaines de personnes. Ainsi l'on avait formé des sections pour les sciences médicales, pour la physique et la chimie, pour la géologie, pour la botanique, etc., et chacune de ces sections nommait son président particulier.

Pendant la semaine que dura la réunion, les journées étaient partagées à peu près de la manière suivante : De huit à dix heures du matin, on se réunissait par sections, soit pour faire des lectures de mémoires. soit pour répéter des expériences ou communiquer des faits nouveaux, soit encore pour discuter des points scientifiques qui pouvaient être de quelque importance. On se rendait ensuite à l'assemblée générale, où avaient lieu des lectures présentant le résumé des recherches dont les détails devaient être renvoyés aux sections. La première séance générale fut ouverte par un discours de M. le professeur *Tiedemann*, qui avait été désigné, à Berlin, pour présider la réunion de 1829, en même temps que M. le professeur *Gmelin* lui avait été adjoint comme secrétaire. Après la séance générale, on s'assemblait, vers une heure, dans la grande salle du Musée, pour prendre part à un banquet commun, auquel assistaient aussi les dames. L'après-dînée était ordinairement consacrée à des promenades et à des excursions dans les environs de Heidelberg, soit du côté des jardins de Schwetzingen, soit vers les magnifiques ruines du château de Heidelberg, soit encore le long de la charmante vallée du Nécre. Ces promenades avaient également lieu en commun et sous la direction du président et du secrétaire, qui avaient obligeamment arrangé les choses de manière que les étrangers, tout en prenant part aux travaux de la journée, pussent en même temps visiter ce que présentaient de plus remarquable Heidelberg et ses environs. Leur obligeance, sous ce rapport, avait été dignement secondée par MM. les professeurs *Leonhard*, *Muncke*, etc., qui avaient ouvert aux membres de la réunion leurs collections particulières et celles de l'université.

Ces savans, qui semblaient avoir pris à tâche de faire les honneurs de la réunion avec autant d'hospitalité que de délicatesse, s'étaient partagé les soirées et avaient formé chez eux, indépendamment des réunions du musée, des réunions particulières, où les savans étrangers pouvaient se mettre en rapport de la manière la plus agréable.

Il serait difficile de donner une idée de toutes les communications qui ont été faites pendant les huit jours qu'a duré la réunion, puisque l'on comptait plus de cent lectures faites, soit dans les assemblées générales, soit dans les sections. S'il m'était permis d'emprunter une comparaison triviale, je dirais que ces sortes de réunions sont comme des bazards, où chacun apporte le produit du travail de l'année et reçoit en échange ce qui a été fait par les autres. Ces communications se font rapidement et d'une manière plus sûre que par les journaux, qui ne renferment souvent que des détails inexacts et insuffisans. L'auteur est intéressé à exposer clairement ce qu'il a fait et à le mettre sous son jour le plus favorable. D'ailleurs on a la faculté de l'entretenir, de lui faire des objections et de lever les doutes qu'on pourrait conserver. Je dois ajouter à ceci qu'on n'a pas toujours sous la main les instrumens nécessaires pour répéter des expériences dont on lit la description, et que dès lors la lecture perd presque tout son avantage. Ainsi j'ai vu plusieurs savans qui, depuis long-temps, avaient été instruits par les journaux des recherches curieuses de M. *Robert Brown*, sur les mouvemens des particules des corps, ne s'en former une idée exacte qu'après les avoir vus s'effectuer au moyen des instrumens que ce célèbre naturaliste avait eu la complaisance d'apporter dans les sections.

Ces réunions ont encore l'avantage d'assembler sur un même point un grand nombre de savans avec lesquels on peut se mettre en rapport sans se déplacer beaucoup; c'est aussi un point de rapprochement pour ceux qui se connaissent déjà et qui souvent sont agréablement surpris de se retrouver ensemble, sans s'être prévenus d'avance.

Dans une des dernières séances générales, on s'est occupé de fixer le lieu de la réunion pour 1830. Les villes qui semblaient présenter le plus de titres étaient Hambourg, Gotha et Breslau. Dans la discussion qui eut lieu à cet égard, on entendit plusieurs orateurs, et entre autres MM. *Lichtenstein*, *Oken*, *Fricke*, etc. La majorité des voix s'est réunie sur Hambourg; on a en même temps désigné pour président le bourgmestre de cette ville, en lui adjoignant, en qualité de secrétaire, M. le docteur *Fricke*. On a aussi soulevé la question de savoir s'il convenait que la réunion s'étendît à toutes les parties de l'Europe, ou si elle devait demeurer spécialement attachée à l'Allemagne. La question a été décidée affirmativement dans ce dernier sens, et avec raison, je pense. L'amour-propre national tend maintenant à lui donner le plus de solidité et d'éclat possible; on ne repousse pas les étrangers, on les admet au contraire, et avec les mêmes égards, les mêmes avantages que les autres membres; mais on ne veut pas que le lieu de la réunion puisse varier dans des limites aussi larges que l'Europe. D'ailleurs, la multiplicité des langues, sans parler de l'indifférence qui naîtrait d'une pareille extension, détruirait bientôt son unité, qui est la condition de son existence. Rien n'empêche que les différens pays aient leurs réunions particulières; celle de l'Allemagne même a été faite d'après l'exemple de ce qui se pratique en Suisse. Il serait utile cependant que de pareilles réunions, si elles venaient à se former, pussent se mettre en rapport et communiquer ensemble.

Heidelberg, qui s'appuie vers le midi contre la montagne le *Kœnigstuhl*, dont la hauteur est de plus de 1600 pieds, et qui, vers le nord, est masquée par le Heiligberg, dont la hauteur n'est guère moindre, était peu propre à recevoir la construction d'un observatoire. Aussi l'on n'y trouve que ce qu'exigent les leçons de l'université. M. le professeur *Muncke* possède cependant quelques belles lunettes; cet habile professeur a aussi dans son cabinet de physique plusieurs instrumens remarquables; il a eu la complaisance de me montrer égale-

ment ceux avec lesquels il vient de faire ses expériences sur la densité de l'eau à différentes températures. On sait que la nouvelle édition du *Dictionnaire de Gehler*, qui paraît actuellement à Leipsig et qui présente des augmentations considérables, se fait par les soins de MM. *Muncke*, *Gmelin*, *Horner*, *Brandès* de Leipsig, etc.

Pendant mon séjour à Heidelberg, j'ai eu le plaisir de faire la connaissance de M. *Horner*, voyageur aussi savant que modeste. Je ne dois pas oublier non plus M. *Ruppel*, de Francfort, dont les voyages en Égypte ont enrichi les sciences.

Je dois à l'obligeance de M. le conseiller *Rau*, professeur d'économie politique à Heidelberg, d'avoir été introduit chez M. *Malchus*, ancien ministre des finances en Bavière, qui s'est fait un nom distingué par ses recherches statistiques, mais dont les ouvrages sont malheureusement encore peu connus en France et dans les Pays-Bas.

Les savans de notre pays qui assistaient à la réunion étaient MM. *Frémery*, *Schrœder Van der Kolk* et *Sebastian* d'Utrecht, ainsi que M. *Fohmann*, gendre du célèbre *Tiedeman* et professeur d'anatomie à l'université de Liége.

Il est remarquable que la France, si voisine du lieu de la réunion, y ait envoyé si peu de savans; car, à l'exception de ceux venus de Strasbourg, que l'on peut plutôt considérer comme appartenant à la nation allemande, M. le baron *De Férussac* était le seul représentant de ce royaume, du moins, quant à la partie continentale, car les colonies avaient aussi leur représentant dans M. *Le Chevalier*, de la Martinique. M. *De Férussac* avait eu particulièrement en vue de communiquer à la réunion le nouveau plan du *Bulletin Universel*, entreprise colossale qu'il soutient avec la plus louable persévérance, et dont il désirait consolider encore l'existence par la participation active des savans étrangers. Une commission spéciale fut nommée pour cet objet, et les discussions qui eurent lieu à cette occasion, déposent en faveur de l'utilité de l'entreprise du *Bulletin Universel*.

L'Angleterre de son côté, avait pour représentans M. *Robert*

Brown et quatre autres savans, parmi lesquels je fus charmé de retrouver M. le professeur *Wheewell*, dont j'avais eu l'honneur de faire deux ans auparavant la connaissance à l'université de Cambridge. La conversation spirituelle et les connaissances aussi solides que variées de cet habile professeur, ont beaucoup ajouté à l'agrément de mon séjour à Heidelberg. Il eut la complaisance de me communiquer alors une observation très-curieuse sur les bandes colorées produites par des miroirs plans, que je m'occupai d'étudier avec lui et avec M. *Coddington*, son collègue, à Cambridge, qui vient de publier le premier volume d'un traité élémentaire d'optique, dans lequel on trouve des recherches fort intéressantes.

Dans une séance de la section de physique, il fut aussi question de la théorie des couleurs, à propos d'expériences de M. le professeur *Roux*, dont les idées sur cet objet se rapprochent beaucoup de celles du célèbre *Goethe*. On sait que ces idées n'ont pas été généralement accueillies d'une manière favorable; j'ai encore trop peu approfondi les écrits de l'illustre vieillard de Weimar, pour oser me prononcer à cet égard; mais j'ai recueilli avec intérêt les expériences que j'ai vu produire des deux parts, abstraction faite de toute considération de théorie. Les recherches de M. *Roux* ont paru à Heidelberg, en trois livraisons successives, sous le titre : *Die Farben.*

Mes expériences sur l'intensité magnétique ne furent point négligées à Heidelberg. Je me trouvai heureusement logé dans le voisinage de MM. *Doebereiner* et *Brandès*, de Salzuffel, et dans une partie de la maison habitée par M. le professeur *Geiger*, qui voulut bien me permettre de faire mes observations dans son jardin; je les fis à plusieurs reprises, et j'eus la curiosité de les répéter encore au point le plus élevé du Koenigstuhl. Les mauvais temps ne me permirent malheureusement pas d'aller faire une seconde série d'expériences sur ce point élevé, pour vérifier si la différence très-petite à la vérité, que j'avais trouvée entre le sommet et le pied de la montagne, ne provenait pas de l'observation même.

Peu d'étudians restaient à Heidelberg au moment où com-

mença la réunion. Il est pénible de dire qu'on ne rencontre guère de groupes de ces jeunes gens, sans en trouver quelques-uns dont la figure ne soit couverte de cicatrices ; il en est même qui sont mutilés d'une manière déplorable. Presque chaque jour voit une querelle ; et chaque querelle est suivie d'un duel. Les combattans sont ordinairement enveloppés de coussins et de mouchoirs, de manière à se garantir le cou, les bras, le cœur. Peu de parties sont exposées aux coups des adversaires, et il semble que la figure soit exposée de préférence pour que les blessures soient plus visibles : leur nombre même semble être un titre de considération. Cet usage barbare n'existe pas à Heidelberg seulement, on le retrouve dans la plupart des universités de l'Allemagne.

Je fus un des derniers à quitter Heidelberg. Je me dirigeai alors par Swetzingen vers Mannheim, où je comptais visiter l'observatoire et le directeur M. *Nicolaï*, que j'avais eu le plaisir de voir, à la dernière réunion des naturalistes, la veille de mon départ : j'ai regretté que le temps ne me permît pas de visiter également à Spire M. le professeur *Schwerd*, qui avait eu l'obligeance de m'inviter à voir son observatoire, et qui avait quitté Heidelberg, immédiatement après la première réunion générale.

Observatoire de Mannheim, Bonn ; conclusion.

L'observatoire de Mannheim dont les fondemens furent jetés en 1772, ressemble sous plusieurs rapports à l'observatoire de Berlin. Cet édifice présente, sans y comprendre le rez-de-chaussée, quatre étages sur une hauteur de 111 pieds : sa forme est carrée, et ses faces sont dirigées vers les quatre points cardinaux. Il est situé à l'ouest de la ville, dans une partie des jardins qui entourent le palais. Les murs, surtout ceux des fondemens, sont d'une épaisseur considérable. La face principale est tournée à l'ouest, et l'escalier est pratiqué dans une cage elliptique de 12 ½ pieds de largeur, qui le lie à la face orientale.

Le rez-de-chaussée n'est à proprement parler qu'un grand vestibule, d'où l'on passe au premier étage, espèce d'entre-sol, destiné à servir d'habitation à l'astronome. Cependant ce local est très-resserré, et M. *Nicolaï* a été forcé de se loger avec sa famille dans l'intérieur de la ville. La salle d'observation pour les grands instrumens se trouve au second étage. C'est là qu'est placée la lunette méridienne avec sa pendule, ainsi qu'un grand quart de cercle mural. Au-dessus de la grande entrée vers l'ouest, est un balcon d'une assez grande dimension pour y permettre le placement d'instrumens mobiles ; il se trouve encore de petits balcons destinés au même usage sur les deux façades dirigées vers le sud et le nord. On trouve également trois balcons au troisième étage, qui renferme la bibliothéque avec quelques cabinets, ainsi qu'au quatrième et dernier étage, qui est une seconde salle d'observation. Au milieu de la plate forme qui est entourée d'une balustrade, s'élève un petit pavillon avec un toit mobile pour observer à l'horizon. Le dessin, pl. IV, pourra donner une idée de l'observatoire ; il est extrait d'un ouvrage publié sur cet édifice en 1811, par M. *Klüber : Die sternwarte zu Mannheim*, etc., in-fol., 62 pages.

La construction de l'observatoire de Mannheim a coûté 70,000 florins (150,842 francs). Dès l'année 1775, on put placer le grand quart de cercle de *Bird;* mais l'instrument des passages de *Ramsden* ne fut achevé que long-temps après. On sentit alors (en 1789) la nécessité d'ajouter une nouvelle construction à la partie occidentale de l'observatoire, pour le placement des deux grands instrumens dont je viens de parler. On avait établi en 1810, vers le nord, un obélisque pour servir de mire à l'instrument des passages ; plus tard on établit vers le sud une seconde mire, destinée au même usage. Le quart de cercle de *Bird* a 8 pouces anglais de rayon, et le limbe porte, comme les autres instrumens du même artiste, la double division en 90 et en 96 parties. L'objectif de la lunette est achromatique et comporte un grossissement de 85 fois. La lunette méridienne est de six pieds de longueur, et elle a trois oculaires, qui grossissent 90, 130 et 200 fois. L'instrument est muni de contrepoids,

et les piliers qui le portent n'ont aucune liaison avec le plancher et les murs extérieurs.

Indépendamment des deux instrumens dont je viens de parler, l'observatoire de Mannheim possédait en 1811, au moment où M. *Klüber* en publiait la description, les instrumens suivans :

Un secteur zénital de *Sisson*, de 9 pieds de rayon ; on ne fait plus usage de cet instrument ;

Un cercle multiplicateur de *Reichenbach* de 3 pouces de diamètre ;

Trois pendules astronomiques par *Le Paute* de Paris, et *J. Arnold* et *C. Norton* de Londres ;

Une lunette achromatique de 6 pieds, par *Dollond* fils, avec une ouverture de 4 pouces et des oculaires grossissant 100 et 160 fois ;

Un héliomètre de 7 pieds, par *Dollond* fils ; l'objectif achromatique qui est séparé par le milieu, a trois pouces de diamètre ;

Une autre lunette achromatique de *Dollond* père, ayant une ouverture de 3 1/2 pouces, et comportant des grossissemens de 80 et 150 fois ;

Quelques télescopes et lunettes non achromatiques ;

Un quart de cercle mobile par *Canivet*, et un autre de *Sisson*;

Deux sextans de 11 et 9 pouces par *Troughton* et par *Dollond* père, avec un horizon artificiel ;

Un théodolite de *Ramsden* de 9 pouces de diamètre ;

Un niveau à bulle d'air de 2 pieds par *Ramsden*, et plusieurs instrumens tels que baromètre, thermomètre, cadrans solaires, globes planétaires, etc.

On a depuis augmenté cette collection :

1° D'un cercle répétiteur de *Reichenbach*, semblable à celui de Paris ;

2° D'une lunette achromatique de *Fraunhofer*, de 42 lignes d'ouverture et de la valeur de 350 florins ;

3° D'un chercheur de comètes construit à Munich.

M. *Nicolaï* estime que la longitude de son observatoire est

de 24′ 30″,0 en temps, à l'est de Paris, et que la latitude est de 49° 29′ 12″, 9. Cet babile astronome conseille de former les supports de la lunette méridienne d'une seule pierre partagée symétriquement en deux parties qu'on éloigne ensuite parallèlement au plan de division. M. *Scherwd* a placé, à l'observatoire de Spire, sa lunette méridienne, en faisant usage de ces précautions, et il a eu sujet de s'en louer.

Christian Mayer, qui avait observé précédemment à Schwetzingen, fut le premier directeur de l'observatoire de Mannheim; il avait pour aide *J. Metzger*, qui mourut en 1780. Lui-même succomba en 1783 et eut pour successeurs, *Ch. Kœnig*, de 1784 à 1786, et *J. N. Fischer* de 1786 à 1787. *P. Ungeschick* mourut ensuite avant d'avoir pu s'installer à l'observatoire. A ces astronomes succéda, en 1788, *Roger Barry* qui, pendant les guerres qui accompagnèrent et suivirent la révolution française, se vit contraint de suspendre ses observations. Il fut rétabli dans son traitement d'astronome au mois d'avril 1804; mais, comme l'observe M. *Klüber*, on laissa à sa charge l'éclairage, le chauffage, la correspondance, et d'autres dépenses qui se font ordinairement aux frais des gouvernemens de qui dépendent les observatoires. L'astronome s'en plaignit amèrement, et l'on finit par rendre sa condition meilleure. L'observatoire de Mannheim a depuis été dirigé par M. le professeur *Schumacher* qui, en se rendant à Altona, eut pour successeur M. *Nicolaï*, le directeur actuel.

Quoique j'aie fait le reste de mon voyage par une des parties les plus pittoresques de l'Allemagne, cependant j'aurai peu de chose à ajouter à ce qui précède. Les bords du Rhin sont plus remarquables aux yeux du peintre et du naturaliste qu'à ceux de l'astronome. En m'embarquant à Mayence sur le bateau à vapeur, j'eus le plaisir d'y revoir encore plusieurs savans qui avaient assisté à la réunion de Heidelberg, et de me retrouver dans la société de MM. *Tiedemann*, *Fohmann*, *Treviranus*, *Friedlander*, etc.; MM. *Studer* de Berne et *Kämtz* de Halle, nous quittèrent près de Bingen; l'un pour faire des re-

cherches géologiques et l'autre pour s'occuper d'observations hygrométriques.

Je m'arrêtai peu de temps à Bonn : j'y visitai l'université et le cabinet de physique dont M. Le professeur *Munchow* eut l'obligeance de me montrer les différens instrumens. Je vis avec intérêt quelques appareils qui ont été construits d'après les idées de ce savant ; je dois citer en particulier ceux qui concernent la recomposition de la lumière blanche par la réunion des rayons élémentaires. L'un de ces appareils m'a paru très-ingénieux. Un prisme est fixé dans la chambre obscure de manière à projeter horizontalement un spectre coloré sur un tableau disposé pour le recevoir : le prisme reçoit alors un mouvement oscillatoire autour d'un axe vertical, au moyen de rouages mis en mouvement par des poids qui descendent par l'action de la gravité. L'amplitude des oscillations n'étant que d'une vingtaine de degrés, le spectre se déplace avec rapidité dans le sens horizontal, et revient assez vite pour que l'impression produite sur la rétine dure encore quand une seconde impression succède à une première. On voit alors une bande blanche horizontale dont les deux extrémités sont limitées par les deux moitiés du spectre coloré. La bande blanche, comme on le conçoit, est formée par la succession des différentes couleurs du spectre qui repassent rapidement sur le même point, et qui produisent sur l'œil des impressions dont l'ensemble répond au blanc.

J'ai regretté de ne pas avoir vu M. le docteur *Plücker*, qui était absent lors de mon passage ; j'ai regretté aussi que le peu d'instans que je suis resté à Popelsdorf pour y faire des expériences sur l'intensité magnétique, ne m'ait pas permis de visiter M. le professeur *Bisschof* qui habite le bel établissement scientifique qu'on a formé dans ce lieu.

Je suis rentré à Bruxelles, en passant par Cologne, Aix-la-Chapelle et Maestricht. Mon absence a été de cent jours environ. Ce court espace de temps est insuffisant, sans doute, pour apprendre à connaître un pays tel que l'Allemagne ; cependant tout ce que j'ai vu est propre à donner l'idée la plus

favorable de la manière dont on y cultive les sciences mathématiques et physiques, et l'astronomie en particulier. Les astronomes y sont généralement géomètres, et quelques-uns sont des géomètres du premier mérite. Je dois ajouter à ceci qu'il existe entre eux la plus noble émulation ; et que cette émulation dont la science retire les plus grands avantages, est en général dignement secondée par les gouvernemens.

Manière de former une pile rectangulaire avec un nombre donné de boulets ou dans un espace limité, en employant le plus de boulets possible, par M. Roche, professeur de mathématiques, de physique et de chimie, à l'École d'Artillerie de la Marine, à Toulon.

PREMIER PROBLÈME.

Trouver les côtés de la plus grande pile rectangulaire que l'on puisse former avec un nombre donné de boulets.

Désignons par N le nombre donné de boulets, par P le nombre de ces boulets qui entrent dans la formation d'une pile rectangulaire, et qui sera nécessairement moindre que N ; désignons par n le petit côté, par m le grand côté de la pile, nous aurons par la formule connue

$$P = \frac{n(n+1)}{2} \frac{(3m-n+1)}{3} = \frac{3(n^2+n)m+n-n^3}{6},$$

de cette équation, nous tirons la valeur de m qui est

$$= \frac{6P+n^3-n}{3n^2+3n}.$$

D'après la nature de cette pile, m doit être plus grand que n,

ou $m-n$ doit être positif. Or, on trouve

$$m-n=\frac{6P-2n^3-3n^2-n}{3n^2+3n};$$

le dénominateur de cette valeur étant positif, le numérateur doit l'être, c'est-à-dire que $2n^3+3n^2+n$ doit être plus petit que 6P, donc

$$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n<3\,P,$$

et à plus forte raison

$$n<\sqrt[3]{3P} \quad \text{et} \quad n<\sqrt[3]{3N}$$

puisque N est plus grand que P ; on a donc, en prenant pour n la racine cubique de 3N à une unité près, ou cette racine diminuée d'une unité, la plus grande pile quadrangulaire que l'on puisse former avec un nombre déterminé de boulets; car si le nombre N de boulets pouvait se former exactement en une pile carrée, n serait donné par l'équation

$$2n^3+3n^2+n-6N=o,$$

et l'on trouverait n, en cherchant ses racines commensurables; la condition ci-dessus résulterait également de la valeur de l'arête supérieure $m-n+1$; car on a

$$m-n+1=\frac{6P+2n-2n^3}{3n^2+3n};$$

d'où l'on déduit $n^3<3P-n$, et à plus forte raison $n^3<3P$ et $n^3<3N$. Cette condition se rapporte spécialement à la pile rectangulaire, et peut convenir comme la première à la pile carrée ; c'est pourquoi, si l'on représente par n la racine cubique de 3N à une unité près, d'après la première condition la quan-

tité $3P - n^2$, et, à plus forte raison, le reste $3N - n^3$ doit être plus grand que

$$\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\,;$$

et, d'après la seconde, on aurait le même reste $3N - n^3 > n$; donc, lorsque le premier reste sera plus petit que

$$\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\,,$$

il faudra diminuer n d'une unité pour avoir une pile carrée, et lorsqu'il sera plus petit que n également, ce qui est une limite plus rapprochée; mais si l'on diminue encore cette valeur d'une ou de plusieurs unités, ou pourra alors former une pile rectangulaire qui contiendra plus de boulets que la pile carrée; soit en effet m le grand côté de cette pile, n le petit côté, la valeur de la pile sera

$$P = \frac{(n^2 + n)}{2}\left(\frac{3m - (n - 1)}{3}\right);$$

donc on aura le facteur

$$m - \left(\frac{n - 1}{3}\right) = \frac{2P}{n^2 + n}\,,$$

en divisant le nombre de boulets donnés N dont P est la valeur approchée, par le nombre de boulets de la face triangulaire

$$n\frac{(n + 1)}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{n^2 + n}{2}:$$

désignant ce quotient par q, on aura l'équation

$$m - \frac{(n - 1)}{3} = q\,,$$

d'où l'on déduit

$$m = q + \frac{n-1}{3},$$

et l'on prendra pour m le nombre entier immédiatement au dessous de cette valeur.

Exemple :

Soit proposé de chercher la plus grande pile oblongue que l'on peut faire avec 900 boulets. La racine approchée de $3N = 2700$ est 13, qui répond à la pile carrée; faisant successivement $n = 12$, $n = 11$, nous aurons les résultats suivans :

$$n = 13,\ m = 13,\ P = 819,$$
$$n = 12,\ m = 15,\ P = 884,$$
$$n = 11,\ m = 16,\ P = 836.$$

On voit par cet exemple que la valeur de la pile *maximum* est de 884 boulets, formant une pile rectangulaire, dont le côté est 12 et le grand côté 16; cependant la valeur $n = 11$, donne avec $m = 16$, une valeur inférieure moins approchée; mais si l'on faisait $m = 17$, on aurait alors une face de plus de 66 boulets dans la pile qui serait de 902 boulets, et présenterait 2 boulets en excès.

SECOND PROBLÈME.

Étant donné un espace triangulaire ou trapézoïdal, y inscrire une pile rectangulaire qui contienne le plus de boulets possible.

Supposons d'abord que l'espace donné soit représenté par un triangle tel que ABC, fig. 1 et 2; désignons par b sa base AC, par h sa hauteur BD, et supposons inscrit à ce triangle, un rectangle EFGH, il s'agit de déterminer quels seront les côtés de ce rectangle qui, évalués en diamètres de boulets, donneront la plus forte pile rectangulaire, en ayant égard encore à l'ex-

cédent que la surface du boulet qui occuperait l'extrémité d'un des côtés EG ou FH, pourrait donner hors du triangle. Pour cela, au lieu du triangle proposé, il faut en concevoir un autre intérieur et semblable, formé par des parallèles menées aux côtés du premier, éloignées de ceux-ci d'une distance égale au demi-calibre du boulet, et augmenter ensuite d'une unité les nombres trouvés pour les côtés EF, adjacens à la base que nous désignerons par x, et les côtés EG ou FH perpendiculaires à cette base, et que nous désignerons par y; pour ne pas compliquer les calculs, nous supposerons que les triangles ABC donnés, représentent non pas les triangles primitifs, mais les triangles secondaires que l'on déduira facilement de ceux-ci, puisque les côtés de ces triangles seront à ceux des triangles primitifs, comme les rayons des cercles inscrits à ces triangles diminués du rayon du boulet sont à ces mêmes rayons, qui, comme on sait, sont égaux aux surfaces des triangles, divisées par leurs périmètres. Il faut d'abord exprimer la relation qui existe entre x et y, d'après la nature du triangle; elle est donnée immédiatement par la similitude du petit triangle supérieur BGH avec le triangle total ABC; en comparant les hauteurs $h-y$ et h, et les bases x et b par la proportion $h-y : h :: x : b$, d'où résulte

$$x=\frac{b(h-y)}{h} \text{ et } y=\frac{h(b-x)}{b}.$$

Si l'espace donné est un trapèze Aa, Bb (*fig.* 3), on peut le supposer composé d'un triangle ABC, plus d'un parallélogramme BCab; et le rectangle inscrit EGfh, se composera aussi du rectangle EFGH, inscrit au triangle plus du rectangle FHfh de même hauteur, et dont la base est égale à la base supérieure du trapèze que je désigne par c, de sorte que la valeur de x ou de Gh, sera la même que celle trouvée pour le triangle plus c, et l'on aura

$$x=c+\frac{b(h-y)}{h}=1,$$

et l'on en tirera

$$y = h\frac{(b+c-x)}{b}:$$

si l'on désigne par B, la plus grande base A*a*, exprimée par $b+c$, on aura

$$x = \frac{Bh - by}{b},\quad y = \frac{Bh - bx}{b}.$$

Dans ces diverses figures, si la base est plus grande que la hauteur, il conviendra de placer le petit côté de la pile dans le sens de cette dernière; ou, ce qui revient au même, de faire $n = y + 1$, dans la formule des piles rectangulaires qui est

$$R = n\frac{(n+1)}{2}\frac{(3m-n+1)}{6} = \frac{3(n^2+n)m+n-n^3}{6}$$

et de faire $m = x + 1$; au contraire, si la hauteur est plus grande que la base, on fera $n = x + 1$ et $m = y + 1$; dans ce dernier cas de la fig. 1, on a $y > x$ ou

$$h\frac{(b-x)}{b} > x,$$

d'où l'on tire

$$x < \frac{bh}{b+h}.$$

Dans le cas de la fig. 2,

$$x > y \text{ ou } b\frac{(h-y)}{h} > y,$$

d'où l'on tire

$$y < \frac{bh}{b+h}.$$

Dans les cas analogues du trapèze fig. 3, on aura

$$x < \frac{Bh}{b+h} \text{ et } y < \frac{Bh}{b+h}.$$

Nous supposerons également pour le trapèze, que l'on considère le trapèze intérieur au trapèze donné, formé par des parallèles à ses côtés, distantes du demi-calibre du boulet.

Pour faire l'application de ces valeurs, on substituera pour y sa valeur en x, ou pour x sa valeur en y, selon que x ou y représenteront le petit côté de la pile diminué d'une unité, de sorte que si l'on représente par x' et y' les vrais côtés de la pile exprimés comme y et x en calibres du boulet, il faudra mettre dans nos valeurs pour x, $x'-1$ et pour y, $y'-1$, et l'on déduira pour le triangle

$$y' = \frac{b+h+h\,(b-x')}{b},\ x' = \frac{b+h+b\,(h-y')}{h}$$

et pour le trapèze

$$y' = \frac{b+h+Bh-bx}{b} \quad \text{et} \quad x' = \frac{b+h+Bh-by}{h}.$$

Exemple du premier cas.

Supposons (*fig.* 1), la base AC du triangle intérieur $b=8$, sa hauteur $Bd=h=18$, ces lignes étant exprimées en calibres de boulets, nous aurons

$$x < \frac{bh}{b+h} \text{ ou } x < \frac{144}{26} \text{ ou } x < 5\frac{7}{13}.$$

Si donc nous essayons les diverses valeurs de x depuis $x=5$, en descendant et déterminant y par l'équation

$$y = \frac{h(b-x)}{b} = 18\,\frac{(8-x)}{8} = 9\,\frac{(8-x)}{4}$$

et calculant ensuite la pile oblongue, dont $y+1$ est le grand côté et $x=1$ le petit côté, par la formule connue, nous aurons

les résultats suivans, m et n désignant toujours le grand et le petit côté de la pile, et N le nombre de boulets qu'elle comprend.

$$x = 5,\ y = 6,\ n = 6,\ m = 7,\ N = 112.$$
$$x = 4,\ y = 9,\ n = 5,\ m = 10,\ N = 130.$$
$$x = 3,\ y = 10,\ n = 4,\ m = 11,\ N = 100.$$

L'on voit facilement à l'inspection de ces valeurs, qu'il y a pour x une valeur qui est inférieure à sa limite 5, et qui répond au *maximum* de la pile qui se trouve aussi être une pile rectangulaire de 5 sur 10, contenant 130 boulets.

Exemple du second cas.

Supposons la base AC $= b = 24$, la hauteur BD $= h = 6$ (*fig.* 2), nous aurons

$$y < \frac{bh}{b+h} \quad \text{ou} \quad y < \frac{144}{30} \quad \text{ou} \quad y < 4\frac{4}{5},$$

essayant donc pour y diverses valeurs depuis $y = 4$, en descendant et déterminant x par l'équation

$$x = \frac{b(h-y)}{h} = 4(6-y)$$

nous aurons les résultats suivans :

$$y = 4,\ x = 8,\ n = 5,\ m = 9,\ N = 115,$$
$$y = 3,\ x = 12,\ n = 4,\ m = 13,\ N = 120,$$
$$y = 2,\ x = 16,\ n = 3,\ m = 17,\ N = 98.$$

Valeurs d'après lesquelles on voit facilement que la valeur de y, qui répond au *maximum* de la pile, n'est inférieure que d'une unité à sa limite 4, qui se trouve ainsi exprimer le petit côté de la pile.

Exemple du troisième cas.

Supposons la grande base du trapèze (*fig.* 3), $Aa = B = 20$ calibres, la petite base $Bb = 15$ ou la différence, base du triangle, c'est-à-dire, $AC = b = 5$ et la hauteur $AD = h = 7$, ce qui répondra au premier cas des triangles, nous aurons

$$x < \frac{Bh}{b+h} \quad \text{ou} \quad x < \frac{140}{12} \quad \text{ou} \quad x < 11\ \frac{2}{3},$$

essayant donc les valeurs de x depuis 11 et au-dessous, nous aurons les résultats suivans, y étant donné par la formule

$$y = \frac{h(B-x)}{b} = \frac{7}{5}(20-x),$$

$x = 11,\ y = 12,\ n = 12,\ m = 13,\ N = 695$
$x = 10,\ y = 14,\ n = 11,\ m = 15,\ N = 770$
$x = 9,\ y = 15,\ n = 10,\ m = 16,\ N = 715.$

Valeurs d'après lesquelles on voit facilement, comme dans les exemples précédens, que la valeur qui donne la pile *maximum*, répond à une valeur de x inférieure d'une unité à sa limite, ou à une valeur du petit côté de la pile égale à cette limite.

Si l'on eut pris des valeurs de x et de y inférieures à leurs limites dans ces divers exemples, on conçoit aisément que l'on aurait obtenu des résultats inférieurs.

On peut même démontrer directement que, dans ces divers cas, il existe des valeurs de x et de y qui donnent des valeurs *maximum* de la pile, et faire voir que les résultats obtenus par cette considération s'accordent avec ceux que nous venons de trouver très-simplement. En effet, si nous substituons aux petites côtés m et n de la pile, leurs valeurs exprimées par $x + 1$ ou $y + 1$, il faudra substituer pour x ou y leurs valeurs que nous avons trouvées, qui expriment l'une de ces

inconnues par l'autre, ou, si l'on veut, les côtés de la pile $x+1=x'$, ou $y+1=y'$, l'un par l'autre, ou pour plus de simplicité et d'uniformité, on exprimera tout au moyen du petit côté de la pile qui, dans un cas, sera $x+1$, et dans l'autre $y+1$, de sorte que le nombre N de boulets qui est exprimé par

$$n\frac{(n+1)}{2}\frac{(3m-n+1)}{3} \quad \text{ou par} \quad \frac{(3m+1)n+3mn^2-n^3}{6}$$

se trouvera représenté par une expression de la forme

$$\frac{-An^3+Bn^2+Cn}{6}$$

et que l'on aura l'équation $-An^3+Bn^2+Cn=6N$. Or, pour déterminer la valeur de n qui rend N ou 6N un *maximum* ou un *minimum*, il faut égaler à zéro le polynome dérivé de $-An^3+Bn^2+Cn$ qui serait le coefficient de la première puissance de l'accroissement i de h, lorsque h deviendrait $h+i$; cette valeur de h qui en résulterait dans le cas qui nous occupe, et qui provient de l'équation $3An^2-2Bn=C$ serait

$$n=\frac{B\pm\sqrt{B^2+3AC}}{3A},$$

rendrait négatif le coefficient de la seconde puissance de l'accroissement qui serait $-3An+B$ et, conséquemment, répondrait à un *maximum*. Nous pouvons, en prenant un exemple particulier où les dimensions d'un espace triangulaire seront données en pieds, faire l'application de cette méthode et la comparer à la précédente.

Quatrième exemple.

Supposons que l'on veuille chercher quelle est la plus grande

pile rectangulaire de boulets de 36 que l'on peut inscrire dans un triangle, pour lequel le triangle intérieur dont les côtés seraient distans de ceux du premier d'un demi-calibre de 36, aurait 30 pieds de hauteur et 20 pieds de base, je cherche d'abord combien ces dimensions contiennent de calibres de 36, qui est 6 pouces 3 lignes ou 75 lignes, ou $\frac{75}{144}$ ou $\frac{25}{48}$ de pied, on trouve 57,6 calibres pour la hauteur, et 38,4 pour la base. J'exprime ces dimensions avec leurs fractions décimales, au moins jusqu'aux dixièmes, parce que, comme dans les quotiens qui déterminent les côtés de la pile inscrite, on doit se borner aux nombres entiers; en négligeant les fractions dans les dimensions premières, on pourrait commettre l'erreur d'un boulet dans les côtés de la pile : on emploie donc la formule démontrée

$$y = \frac{h(b-x)}{b}$$

qui devient dans ce cas

$$y = 57{,}6\,\frac{(38{,}4 - x)}{38{,}4}, \qquad (1)$$

et comme c'est dans ce cas $y + 1$ qui est le grand côté m, et $x + 1$ qui est le petit côté n de la pile, on a $y = m - 1$ et $x = n - 1$, et substituant ces valeurs, on trouve

$$m - 1 = \frac{57{,}6\,(38{,}4 - n)}{38{,}4}$$

et

$$m = \frac{2250{,}24 - 57{,}6n}{38{,}4} = \frac{187{,}52 - 48n}{3{,}2} = 5{,}86 - 0{,}15\,n.$$

Substituant cette valeur de m dans l'expression de la pile

$$N = \frac{-n^3 + 3mn^2 + (3m+1)\,n}{6},$$

on a

$$N = \frac{-0{,}55n^3 + 18{,}03n^2 + 18{,}58n}{6};$$

comparant cette expression à la formule

$$N=\frac{-An^3+Bn^2+Cn}{6},$$

on a $A=0,55$, $B=18,03$, $C=18,58$ dans l'expression de la valeur de

$$n=\frac{B+\sqrt{B^2+3AC}}{3A}.$$

On verra facilement que la valeur de n est moyenne entre

$$\frac{2B}{3A} \quad \text{et} \quad \frac{2B+1}{3A}$$

et qu'elle s'approche plus de

$$\frac{2B+1}{3A}$$

et encore plus de

$$\frac{2B+\frac{3}{2}A}{3A}.$$

On verra donc aisément, sans même se donner la peine d'effectuer l'extraction de la racine du radical, que $n=22$ en nombre entier. En suivant la méthode indiquée ci-dessus, on trouverait

$$x<\frac{bh}{b+h} \quad \text{ou} \quad x<23,04$$

en mettant pour b et h leurs valeurs; substituant donc les valeurs de x à compter de 23 en descendant, on aura les résultats suivans, y étant donné par l'équation (1) qui se réduit à

$$y=\frac{3}{2}(38,4-x),$$

$$x = 23,\ y = 23,\ m = 24,\ n = 24,\ N = 4900$$
$$x = 22,\ y = 24,\ m = 25,\ n = 23,\ N = 4876$$
$$x = 21,\ y = 26,\ m = 27,\ n = 22,\ N = 5060.$$

Nous voyons par ce tableau que le *maximum* répond à $n=22$, comme nous l'avons trouvé par la méthode des *maxima*.

Si les valeurs de N, à partir de $x=21$, ne paraissent pas décroissantes, c'est que dans la valeur $y=24$ qui répond à $x=22$, on a négligé la fraction 0,6; mais les résultats sont toujours au-dessous de 5060.

Dans cet exemple, j'ai considéré immédiatement pour plus de simplicité le triangle intérieur, cependant il est bon d'indiquer comment on peut le calculer assez simplement en connaissant les dimensions du triangle principal. Dans celui-ci, il ne suffirait plus de connaître la base et la hauteur, les angles à la base étant aigus, il faudrait connaître encore l'inclinaison des côtés, ou, ce qui revient au même, les trois côtés; on calculerait alors le rayon du cercle inscrit au triangle, et la hauteur de ce triangle par les formules

$$r=\sqrt{\frac{p-a.p-b.p-c}{p}},\qquad h=\frac{2\sqrt{p.p-a.p-b.p-c}}{b}$$

Dans lesquelles a, b, c désignent les trois côtés, b étant celui de la base, p la demi-somme des côtés, h la hauteur et r le rayon du cercle inscrit.

On déterminerait alors les côtés du triangle intérieur opposés aux côtés a, b, c, en multipliant les côtés respectifs par le rapport du rayon du cercle inscrit à ce rayon diminué du demi-calibre du boulet. On déterminerait de même la hauteur du triangle extérieur; il suffirait, pour le calcul, de déterminer la nouvelle base et la nouvelle hauteur que l'on évaluerait en calibres de boulets, en prenant les valeurs, pour plus d'exactitude, approchées jusqu'aux dixièmes et même jusqu'aux centièmes, et l'on opérerait comme dans le cas précédent. Si l'espace

donné était un trapèze, le calcul serait encore le même ; car le trapèze intérieur se composerait du triangle intérieur à celui formé sur la différence des deux bases et d'un parallélogramme ayant même base supérieure que le trapèze primitif.

Pour compléter la théorie que je viens d'exposer, il faut encore, un triangle étant donné avec ses trois côtés, déterminer sur lequel de ces trois côtés pris pour base, on inscrirait la plus grande pile; il est à peu près évident que l'on ne peut établir de règle positive à ce sujet, et qu'il faudra déterminer les trois piles *maximum* formées sur les trois côtés pris pour base, pour déterminer la plus grande. Mais si l'on se proposait de déterminer quelle doit être la base et la hauteur du triangle d'une surface donnée où l'on peut inscrire la plus grande pile, on la déterminerait de la même manière qu'on l'a fait pour les côtés x et y du rectangle inscrit, ou les côtés $x+1$ et $y+1$ de la pile inscrite P; car la base et la hauteur qui entrent dans l'expression

$$x=\frac{b(h-y)}{h}$$

de x en y, ou

$$y=\frac{h(b-x)}{b}$$

de y en x, étant liées entre elles par la relation $2\,bh=\mathrm{S}$, S étant la surface du triangle, on chercherait la valeur de b en h et de b en S, qui donnerait le *maximum* de la pile *maximum*.

Cinquième exemple.

Sur quel côté pourrait-on inscrire la plus grande pile dans un triangle dont le triangle intérieur, distant d'un demi-calibre de 36, aurait pour côtés des lignes comprenant 18 calibres, 30 calibres et 24 calibres.

Ce triangle serait rectangle, puisque ses côtés sont dans le rapport des nombres 3, 4 et 5, les bases 18, 24 et 30 répondraient donc aux hauteurs 24, 18 et 144, pour la pile *maximum*

relative à la base 18 moindre que sa hauteur. Je prendrai pour limite

$$x < \frac{bh}{h+b} \quad \text{ou} \quad x < \frac{18 \times 24}{42} = 10\,\frac{2}{7},$$

en déterminant y par la formule

$$y = \frac{h(b-x)}{b} = \frac{24(18-x)}{18} = \frac{4}{3}(18-x)$$

et j'obtiendrais pour les valeurs $x = 10,\ 9,\ 8$, les résultats suivans :

$$\begin{array}{l} x = 10,\ y = 10,\ n = 11,\ m = 11,\ N = 506 \\ x = 9,\ y = 12,\ n = 10,\ m = 13,\ N = 550 \\ x = 8,\ y = 13,\ n = 9,\ m = 14,\ N = 510, \end{array}$$

qui nous montrent que la pile rectangulaire *maximum*, a pour base un rectangle de 10 boulets sur 13, et comprend 550 boulets.

Pour les bases 24 et 30, qui sont plus grandes que les hauteurs, j'employerai la limite

$$y < \frac{18 \times 24}{42} = 10\,\frac{2}{7} \quad \text{et} \quad y < \frac{18 \times 24}{44,4} = 9\,\frac{27}{37}.$$

Déterminant x dans ces deux cas par la formule

$$x = \frac{b\,(h-y)}{h} \quad \text{qui devient} \quad x = \frac{30\,(14,4-y)}{14,4}$$

pour le second, le seul à considérer ; car le premier cas nous donnera les mêmes résultats que nous avons trouvés, ce qui est un effet de ce que le triangle est rectangle ; mais le second donnera les résultats suivans :

$$\begin{array}{l} y = 9,\ x = 11,\ n = 10,\ m = 12,\ N = 495 \\ y = 8,\ x = 13,\ n = 9,\ m = 14,\ N = 505 \\ y = 7,\ x = 15,\ n = 8,\ m = 16,\ N = 492, \end{array}$$

valeurs d'après lesquelles on voit que la pile *maximum* correspond à un rectangle de 9 boulets sur 14, et comprend 505 boulets, formés sur la base 30 et la hauteur 14,4; mais la pile *maximum* précédente, formée sur la base 24 et la hauteur 18, ou la base 18 et la hauteur 24 sur une base de 10 boulets sur 13, qui est de 550 boulets, présente un avantage de 45 boulets.

L'on peut remarquer à ce sujet, que deux triangles de même base et de même hauteur, à supposer qu'il n'y ait pas d'angles obtus adjacens à la base, ne contiendront pas le même nombre de boulets dans la plus grande pile inscrite, par la raison que le triangle intérieur dépendra des côtés adjacens à la base; mais deux triangles, dont les triangles intérieurs auraient même base et même hauteur, contiendront le même nombre de boulets, quoiqu'ils ne fussent plus ni de même base, ni de même hauteur, car la hauteur serait plus grande dans celui dont le triangle intérieur aurait le plus petit rayon du cercle inscrit, et dont par conséquent l'angle, au sommet, serait le plus aigu. Dans beaucoup de cas où l'on n'aurait pas besoin d'une grande précision, on n'aura pas besoin de calculer le triangle intérieur, ou l'on pourra supposer le triangle donné intérieur, c'est-à-dire éloigné des limites de l'espace donné d'un demi-calibre.

Nous n'avons pas considéré le cas où l'espace donné serait un quadrilatère quelconque, n'ayant pas de faces parallèles; car, si dans ce cas on voulait déterminer la plus grande pile inscrite sur un des côtés, en considérant toujours le quadrilatère intérieur, comme on l'a fait pour les cas précédens, il est évident que la plus grande pile inscrite serait ou une pile inscrite au trapèze formé par une parallèle à la base menée par l'angle du quadrilatère le moins élevé, jusqu'à la rencontre de l'autre côté adjacent, ou une pile inscrite au triangle formé par ce côté adjacent et le quatrième côté supposé prolongé jusqu'à la rencontre de la base. On chercherait d'abord la pile *maximum* inscrite à ce triangle, et si la hauteur du rectangle où aboutissent les centres des boulets, qui est comme on sait un des côtés de la base de la pile diminuée d'un calibre, était plus grande que la

hauteur du second côté répondant à l'angle le moins élevé, la pile ainsi obtenue serait la pile *maximum*. Dans le cas contraire, la pile *maximum* se trouvant dans la partie du triangle formé par le quatrième côté prolongé, indiquerait qu'il faut chercher la pile *maximum* dans le trapèze intérieur au quadrilatère, et on la trouverait par la méthode que nous venons d'exposer.

Si l'espace donné était un polygone de plus de quatre côtés, on déterminerait pareillement la pile *maximum* par la considération successive des triangles et des trapèzes formés avec la base par les côtés opposés prolongés, et si le polygone était donné par ses côtés et leurs inclinaisons, ou ses côtés et ses diagonales, on calculerait le polygone intérieur en le décomposant en triangles; on peut donc, d'après les méthodes exposées pour le triangle et le trapèze, résoudre généralement le problème de la pile *maximum* inscrite dans un espace rectiligne limité.

Théorèmes généraux sur les diamètres des surfaces du second degré, par M. Chasles, ancien élève de l'École Polytechnique.

(1) On sait que : « La somme des carrés de trois diamètres » conjugués d'une surface du second degré, est constante; »

Et que : « La somme des valeurs inverses des carrés de trois » diamètres rectangulaires est aussi constante. »

Ces deux propositions peuvent être regardées comme des corollaires de celle-ci :

(2) *Si l'on a deux surfaces du second degré concentriques, la somme des carrés de trois diamètres conjugués quelconques de la première surface, divisés respectivement par les carrés des trois diamètres de la seconde surface compris sur les directions de ces trois diamètres conjugués, est constante.*

En prenant successivement une sphère pour la première puis pour la seconde des deux surfaces, on obtient les deux propositions enoncées.

Mais le théorème (2) n'est lui-même qu'un cas particulier du suivant :

(3) *Si l'on a deux surfaces du second degré, situées d'une manière quelconque dans l'espace, et que par le centre de la seconde, on mène six rayons aboutissans aux extrémités de trois diamètres conjugués de la première, la somme des carrés de ces rayons, divisés respectivement par les carrés des diamètres de la seconde surface compris sur les directions de ces rayons, est une quantité constante.*

Ainsi soient A, a ; B, b ; et C, c, les extrémités de trois diamètres conjugués de la première surface, et A', a' ; B', b', et C', c', les extrémités des demi-diamètres de la seconde surface qui passent par ces points A, a ; B, etc. ; et soit O' le centre de cette seconde surface ; on aura

$$\frac{\overline{O'A}^2}{\overline{O'A'}^2}+\frac{\overline{O'a}^2}{\overline{O'a'}^2}+\frac{\overline{O'B}^2}{\overline{O'B'}^2}+\frac{\overline{O'b}^2}{\overline{O'b'}^2}+\frac{\overline{O'C}^2}{\overline{O'C'}^2}+\frac{\overline{O'c}^2}{\overline{O'c'}^2}=\text{const.}$$

(4) Supposons que la seconde surface soit l'ensemble de deux plans parallèles, également éloignés du point O' ; soit $\overline{O'P}$ la perpendiculaire abaissée du point O' sur l'un de ces plans, on aura

$$\overline{O'A'}=\frac{\overline{O'P}}{\cos.\,(AO'P)},\quad \overline{O'a'}=\frac{\overline{O'P}}{\cos.\,(aO'P)},\ \text{etc}$$

l'équation devient donc

$$[\overline{O'A}\cos.(AO'P)]^2+[\overline{O'a}\cos.\,(aO'P)]^2+\text{etc.}=\text{const.}$$

ce qui prouve que :

Si l'on mène trois diamètres conjugués quelconques d'une surface du second degré, et que par un point fixe on mène six

droites aboutissant à leurs extrémités, la somme des carrés des projections de ces droites sur un axe fixe sera constante, quel que soit le système des trois diamètres conjugués.

(5) Le théorème (3) peut lui-même être généralisé de cette manière :

Étant donné deux surfaces du second degré quelconques et un plan fixe P; si on prend les pôles O, O′ de ce plan par rapport aux deux surfaces; que par le premier O, on mène un système de trois droites telles que la polaire de chacune d'elles, par rapport à la première surface, soit dans le plan des deux autres; qu'on désigne par A, a; *B*, b; *et C*, c, *les points où ces droites rencontrent cette première droite; qu'on mène du point O′ des droites à ces six points, et qu'on désigne par A′*, a′, *B′*, b′, *C′*, c′, *six des points où ces six droites rencontrent la seconde surface, et enfin par L*, l, *M*, m, *N*, n, *les points où elles percent le plan P; on aura*

$$\left(\frac{\mathrm{O'A}}{\mathrm{O'A'}}:\frac{\mathrm{LA}}{\mathrm{LA'}}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{O'}a}{\mathrm{O'}a'}:\frac{la}{la'}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{O'B}}{\mathrm{O'B'}}:\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MB'}}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{O'}b}{\mathrm{O'}b'}:\frac{mb}{mb'}\right)^2+$$

$$\left(\frac{\mathrm{O'C}}{\mathrm{O'C'}}:\frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{NC'}}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{O'}c}{\mathrm{O'}c'}:\frac{nc}{nc'}\right)^2=\text{const.}$$

Quel que soit le système des trois droites menées par le point O, de manière que la polaire de chacune d'elles, par rapport à la première surface, soit dans le plan des deux autres.

(6) Si le plan P est à l'infini, les rapports $\frac{\mathrm{LA}}{\mathrm{LA'}}$, $\frac{la}{la'}$, etc., sont égaux à l'unité, et l'on a simplement

$$\left(\frac{\mathrm{O'A}}{\mathrm{O'A'}}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{O'}a}{\mathrm{O'}a'}\right)^2+\text{etc.}=\text{const.}$$

ce qui exprime le théorème (3).

(7) Si le plan P passe par le centre de la seconde surface, le point O′ sera à l'infini, les rapports $\frac{\mathrm{O'A}}{\mathrm{OA'}}$, $\frac{\mathrm{O'}a}{\mathrm{O'}a'}$, etc., seront

égaux, et l'équation deviendra

$$\left(\frac{LA'}{LA}\right)^2+\left(\frac{la'}{la}\right)^2+\left(\frac{MB'}{MB}\right)^2+\text{etc.}=\text{const.};$$

Cette équation exprime un théorème que nous nous dispenserons d'énoncer.

(8) Si dans ce théorème, la seconde surface est l'ensemble de deux plans parallèles également éloignés du plan P, les droites LA', *la'*, MB', etc., seront toutes parallèles et égales entre elles; l'équation se réduit donc à

$$\frac{1}{\overline{LA}^2}+\frac{1}{\overline{la}^2}+\frac{1}{\overline{MB}^2}+\frac{1}{\overline{mb}^2}+\frac{1}{\overline{NC}^2}+\frac{1}{\overline{nc}^2}=\text{const.}$$

ce qui donne cette propriété remarquable du second degré :

Si par un point fixe on mène trois droites telles que la polaire de chacune d'elles par rapport à une surface du second degré soit comprise dans le plan des deux autres, elles rencontreront la surface en six points, tels que la somme des valeurs inverses des carrés des distances de ces points au plan polaire du point fixe, sera constante, quel que soit le système des trois droites.

Paris, 7 mars 1830.

De tous les quadrilatères inscrits dans un rectangle, celui de moindre contour est un parallélogramme, ayant ses côtés respectivement parallèles aux diagonales du rectangle proposé; et il existe une infinité de quadrilatères inscrits de même contour minimum, *ce* minimum *étant la somme des diagonales du rectangle.* Problème proposé à la pag. 200 du Ve vol. et résolu par M. Pierre Obici, cadet au corps Royal des pionniers de Modène.

Soit ABCD le rectangle proposé, dans lequel est inscrit un

quadrilatère quelconque MNQR. Posons

$$AB=a,\ AD=b,\ AN=x,\ AM=y,\ CR=z,\ CQ=u;$$

on aura

$$BM=a-y,\ BR=b-z,\ DN=b-x,\ DQ=a-u.$$

Le contour du même quadrilatère est donné par l'expression

$$(a)\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{z^2+u^2}+\sqrt{(a-y)^2+(b-z)^2}+\sqrt{(a-u)^2+(b-x)^2}$$

Afin que cette expression soit un *maximum* ou un *minimum*, il faudra que les quatre équations suivantes se vérifient.

$$(1)\qquad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+(a-u)^2}}=o$$

$$(2)\qquad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{a-y}{\sqrt{(a-y)^2+(b-z)^2}}=o$$

$$(3)\qquad \frac{z}{\sqrt{z^2+u^2}}-\frac{b-z}{\sqrt{(a-y)^2+(b-z)^2}}=o$$

$$(4)\qquad \frac{u}{\sqrt{z^2+u^2}}-\frac{a-u}{\sqrt{(b-x)^2+(a-u)^2}}=o,$$

De la forme des équations (1) et (3), on voit d'abord que si elles doivent subsister à la fois, on aura nécessairement $x=z$; et de (2) et (4), on déduit $y=u$; ainsi nous n'aurions qu'à considérer les seules deux équations (1) et (2), qui se réduisent à celles-ci :

$$(5)\qquad \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(a-y)^2}{(b-x)^2}}}=o$$

$$(6)\qquad \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(b-x)^2}{(a-y)^2}}}=o$$

qui se vérifient quand

$$(b) \qquad \frac{y}{x} = \frac{a-y}{b-x};$$

équation qui nous montre que le quadrilatère de contour *minimum* est un parallélogramme, dont les côtés sont parallèles aux diagonales du rectangle, et en outre qu'il existe une infinité de ces quadrilatères, ou parallélogrammes. Substituant alors en (a) la valeur de y, déduite de (b), elle se réduit à

$$2\sqrt{a^2 + b^2}$$

ce qui fait voir que le contour d'un quelconque des quadrilatères précédens, est constant et égal à la somme des deux diagonales.

Par des considérations assez simples et élémentaires, on parvient aussi à la même conclusion.

En effet : on sait que si de deux points partent deux lignes droites, qui se rencontrent sur une autre, de manière que l'angle d'incidence soit égal à l'angle de réflexion, la somme de ces lignes est la moindre possible.

Cela posé, qu'on prenne sur AB un point quelconque M, duquel on conduise la parallèle MN à BD, qui prolongée, rencontre en P la droite CD aussi prolongée; il est alors clair que MP = BD, et prenant DQ = DP, et conduisant NQ, il en résultera NP = NQ, et l'angle MNA = PND = DNQ, d'où le parallélogramme formé par MN, NQ, selon la remarque qui vient d'être faite; aura pour contour un *minimum*, puisque ses côtés font en M, N, Q, R, des angles égaux deux à deux avec les côtés du rectangle : on voit ainsi facilement que le contour est égal à la somme des diagonales du rectangle proposé.

Ce qu'on a dit du point M, on peut le dire de tous les autres points du côté AB, qui, étant en nombre infini, montrent qu'il existe une infinité de quadrilatères inscrits de même contour *minimum*, ce *minimum* étant la somme des diagonales du rectangle.

Mémoire sur quelques propriétés des systèmes de forces, par M. Lévy, lecteur à l'Université de Liége.

M. *Chasles* a énoncé le premier le théorème suivant :

Des forces en nombre quelconque, appliquées dans des directions quelconques à des points invariablement liés entre eux, mais libres d'ailleurs de toute gêne étrangère, peuvent d'une infinité de manières différentes, être remplacées par le système de deux forces. Dans tous les systèmes de deux forces qui peuvent leur être substituées, comme équivalens, le tétraèdre construit sur les droites qui représentent les deux résultantes tant en intensité qu'en direction, considérées comme arêtes opposées, a un volume constant.

M. *Gergonne*, dans le dernier numéro des *Annales de Mathématiques*, pour l'année 1828, a donné une démonstration analitique de cette proposition; et, dans le *Bulletin des sciences mathématiques*, de septembre 1829, on en cite une autre par M. le professeur *Môbius*.

C'est la lecture de ce dernier article qui m'a engagé à chercher de mon côté à démontrer ce théorème curieux. J'y suis parvenu de deux manières différentes, dont l'une repose sur des considérations purement géométriques, et dont l'autre exige l'emploi de l'analise. J'ai trouvé en outre que l'on pouvait ajouter à cette propriété remarquable que possède un système quelconque de deux résultantes, celle qui résulte du théorème suivant :

Si l'on joint par une droite les points d'application de deux quelconques des forces qui, ensemble, peuvent remplacer un système quelconque de forces, et par une autre droite les extrémités des lignes qui représentent les directions et les intensités de ces forces, la ligne qui réunit les milieux de ces deux droites de jonction a toujours la même grandeur et la même direction.

Je commencerai par rappeler une expression du volume d'une pyramide triangulaire qui est connue depuis long-temps. On sait que *ce volume est égal au produit de deux arêtes opposées, c'est-à-dire de deux arêtes qui ne se coupent pas, par le sinus de l'angle qu'elles forment et par le sixième de leur plus courte distance.*

Je démontrerai ensuite deux lemmes qui seront également utiles :

Lemme I. *Soient A et A′ deux forces dont l'action simultanée peut remplacer celle de toutes les forces que l'on considère, et soient B et B′ deux autres forces équivalentes aux précédentes, je dis alors que si les directions des forces A et B sont situées dans un même plan, il en sera de même de celles des forces A′ et B′.*

En effet, les deux forces A et A′ étant équivalentes aux deux forces B et B′, il est clair que si l'on substitue à ces dernières, deux forces qui leur soient respectivement égales en intensité et opposées en direction, les deux nouvelles forces et les forces A et A′ se feront équilibre. Mais par hypothèse la force A et la force qui agit en sens contraire de la force B sont dans le même plan, ces deux forces ont donc une résultante, et cette résultante doit faire équilibre à la force A′ et à la force qui agit en sens contraire de la force B′. Or, quand trois forces se font équilibre, leurs directions sont dans un même plan, donc les directions des forces A′ et B′ sont situées dans un même plan.

Corollaire. Soient MN, M′N′ les directions des forces A et A′, et PQ, P′Q′ celles des forces B et B′ (*fig.* 5). D'après la supposition qui a été faite, les lignes MN et PQ sont dans un même plan, et il en est de même des lignes M′N′ et P′Q′. Supposons que les premières se rencontrent en un point S, et les dernières en un point S′. On peut transporter les points d'application des forces A et B au point S, et ceux des forces A′ et B′ au point S′. Joignons les points S et S′, et prenons sur les droites SM, SQ, S′M′, S′Q′, des parties SC, SD, S′C′, S′D′, proportionnelles aux intensités des forces A, B, A′, B′;

si l'on mène les lignes CD, C'D', ces droites seront égales entre elles, et l'une et l'autre parallèles à la droite SS'.

En effet, si au lieu des forces B et B' on applique aux points S et S' des forces qui leur soient égales en intensité, mais agissant en sens contraire, suivant les droites SP, S'P', il y aura équilibre entre les forces A et A' et les deux nouvelles forces. Or, il est évident que la résultante de la force A et de la force égale à B agissant dans la direction SP, est une force appliquée au point S dont la direction est parallèle à DC, et dont l'intensité est égale à cette même ligne DC; la résultante de A' et de la force égale à B' agissant dans la direction S'P', est pareillement une force appliquée au point S', dont la direction est parallèle à D'C', et dont l'intensité est égale à cette même ligne. D'ailleurs ces deux résultantes doivent se détruire, elles doivent donc être égales en intensité, agir en sens contraire et suivant la droite qui joint leurs points d'application, donc etc.

Lemme II. *Soit encore A et A' un système de deux résultantes, et C et C' un autre système qui lui soit équivalent. Si les directions des forces A et C ne sont pas situées dans le même plan, il en sera de même, d'après le lemme précédent des directions des forces A' et C'; mais, dans ce cas, on peut toujours trouver une infinité de systèmes de deux forces B et B', chacun équivalent au système A et A' ou C et C', et tel, en outre, que les forces B et A aient leurs directions dans un même plan, et que la même chose ait lieu pour les forces B et C.*

Soient MN, M'N' les directions des forces A et A', et PQ, P'Q' celles des forces C et C' (*fig.* 6). Menons une droite VMM'V' qui coupe les droites MN et M'N', et qui ne soit pas parallèle à PQ; par cette droite et la ligne MN faisons passer un plan, et soit S le point où il coupe la droite PQ; joignons le point S avec le point M par la ligne SMT, cette ligne sera dans le plan de l'angle VMN.

Appliquons maintenant aux points M et M' deux forces égales, que nous désignerons, pour plus de clarté, par D

et D′, l'une dirigée suivant la ligne MV et l'autre suivant la ligne M′V′. Ces deux forces se détruiront, et si B représente la résultante des forces A et D, et B′ celle des forces A′ et D′, les deux forces B et B′ formeront un système équivalent au système des deux forces A et A′. Or, on peut toujours prendre l'intensité des forces D et D′ de manière que la résultante B des forces A et D soit dirigée suivant la ligne SMT qui coupe les directions MN et PQ des forces A et C, donc le système des forces B et B′, déterminées par le procédé qui vient d'être indiqué, sera tel que la direction de la force B coupera les directions des forces A et C, et alors, en vertu du premier lemme, la force B′ sera nécessairement dans un même plan avec la force A′, et aussi dans un même plan avec la force C′.

Ces préliminaires posés, passons à la démonstration du théorème de M. *Chasles*. Soit en premier lieu un système de deux résultantes A et A′. Il est évident d'après l'expression de la solidité d'une pyramide triangulaire qui a été citée plus haut, que le tétraèdre construit sur les deux droites qui représentent les forces A et A′ tant en grandeur qu'en direction, aura toujours le même volume en quelque point de leurs directions qu'on applique ces deux forces, car les longueurs des deux arêtes opposées, l'angle qu'elles forment et leur plus courte distance, n'auront point changé.

Considérons maintenant un autre système de deux résultantes B et B′ équivalent au système A et A′, et supposons d'abord que ces forces sont dans le cas du corollaire du premier lemme, c'est-à-dire que les directions des forces A et B se rencontrent en un point S, et celles des forces A′ et B′ en un point S′ (*voy. fig.* 5). SC, S′C′, SD, S′D′ représentant respectivement les intensités des forces A, A′, B et B′, il faut démontrer que le tétraèdre construit sur les droites SC, S′C′ est équivalent à celui construit sur les droites SD, S′D′. Or, le premier peut être considéré comme ayant son sommet au point C et pour base le triangle SS′C′; le second comme ayant son sommet au point D, et pour base

le triangle SS′D′; d'ailleurs ces deux triangles SS′C′ et SS′D′ ont la même surface et sont dans le même plan, puisque d'après le corollaire déjà cité C′D′ est parallèle à SS′; les deux tétraèdres ont donc des bases équivalentes, de plus, CD étant parallèle à SS′, leurs sommets C et D sont situés sur une ligne parallèle au plan SS′C′D′ qui contient les deux bases, ils ont donc aussi même hauteur et par conséquent ils sont équivalens.

Considérons enfin deux systèmes quelconques de résultantes A, A′ et C, C′, équivalens entre eux, et qui soient dans le cas du second lemme, c'est-à-dire tels que ni les directions des forces A et C, ni par conséquent celles des forces A′ et C′ ne se rencontrent. On pourra toujours, par la construction indiquée dans le second lemme, trouver un autre système de deux résultantes B et B′ équivalent au système A, A′, ou au système C, C′, et tel que la droite suivant laquelle est dirigée la force B rencontre celles suivant lesquelles sont dirigées les forces A et C, et que la droite suivant laquelle est dirigée la force B′ rencontre celles suivant lesquelles sont dirigées les forces A′ et C′. Mais alors, d'après ce qui a déjà été démontré, le tétraèdre construit sur les droites qui représentent les deux résultantes B et B′ tant en intensité qu'en direction, sera équivalent et au tétraèdre correspondant aux deux résultantes A et A′, et à celui qui correspond aux deux résultantes C et C′, donc ces deux derniers tétraèdres sont équivalens entre eux. C. Q. F. D.

Le second théorème se démontre encore plus facilement. Soient d'abord MN, M′N′ (*fig.* 7), les lignes qui représentent les grandeurs et les directions d'un système de deux résultantes A et A′. Menons les lignes MM′, NN′; soit G le milieu de la première et H celui de la seconde; par le point M menons MO égal et parallèle à M′N′; menons aussi NO, et joignons M avec le point L, milieu de cette dernière ligne. Il est évident que l'on a $N'O = MM'$, $LH = \frac{1}{2} N'O = MG$, d'où il résulte que ML est égale et parallèle à GH. Or, ML est la moitié de la diagonale du parallélogramme construit sur les deux lignes

MN et MO; cette droite est donc parallèle à la direction de la résultante de deux forces représentées en grandeur et en direction par les lignes MN et MO, c'est-à-dire à la direction de la résultante des deux forces A et A', en les supposant appliquées en un même point M; et quant à sa grandeur, elle est égale à la moitié de la ligne qui représenterait l'intensité de cette même résultante. Les mêmes conclusions s'appliquent donc à GH qui, comme nous l'avons prouvé, est égale et parallèle à ML.

Il résulte de ce qui précède que la droite GH qui joint les milieux des lignes MM', NN', aura toujours la même grandeur et la même direction en quelques points de leurs directions que les forces A et A' soient appliquées.

Soit maintenant un second système de deux résultantes B et B' équivalent au système A et A'; supposons d'abord que les directions de ces forces soient dans le cas du corollaire du premier lemme.

Nous venons de voir que l'on pouvait appliquer les forces en un point quelconque de leurs directions, il suffira donc de prouver (*voy. fig.* 5), que la droite qui joint le milieu de SS' au milieu de CC' est égale à celle qui réunit le milieu de SS' au milieu de DD', puisque les lignes SC, S'C', SD, S'D' représentent respectivement les intensités et les directions des forces A, A' et B, B'. Or, cela résulte évidemment de ce que, comme nous l'avons démontré, les lignes CD et C'D' sont égales et parallèles, car alors les lignes CC', DD' sont dans le même plan et se coupent réciproquement en deux parties égales.

Si nous considérons enfin deux systèmes de deux résultantes quelconques, équivalens entre eux, A, A' et C, C', en employant la construction indiquée dans le second lemme, on trouvera un autre système de deux résultantes B et B' tel que la direction de B coupera à la fois celles de A et C, et la direction de B' celle de A' et C'. Ce dernier cas se trouve donc ramené au précédent, et par conséquent le théorème est généralement démontré.

Il me reste à exposer la démonstration analitique du théorème de M. *Chasles*. Je me servirai des notations dont M. *Poisson* fait usage dans son *Traité de Mécanique*, et je rappellerai d'abord que la quantité LZ + MY + NX est nulle toutes les fois que les forces P, P′, P″, etc., que l'on considère, ont une résultante unique. Je dis ensuite que lorsque cette quantité LZ + MY + NX n'est pas égale à zéro, elle ne change pas de valeur quels que soient les trois axes rectangulaires auxquels on rapporte les points d'applications et les directions des forces P, P′, P″, etc.

En effet, considérons en premier lieu trois axes parallèles à ceux qui correspondent aux quantité X, Y, Z, L, M, N, et désignons par X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1, ce que deviennent ces quantités par rapport aux nouveaux axes. On aura $X_1 = X$, $Y_1 = Y$ et $Z_1 = Z$; et si l'on désigne par x_1, y_1, z_1, les coordonnées de la nouvelle origine, on aura, (*Poisson*, pag. 95).

$$L_1 = L + Yx_1 - Yy_1;\ M_1 = M + Xz_1 - Zx_1;\ N_1 = Zy_1 - Yz_1.$$

Multipliant la première de ces dernières équations, membre à membre, par l'équation $Z_1 = Z$, la seconde par $Y_1 = Y$, la troisième par $X_1 = X$, et les ajoutant on trouvera

$$L_1Z_1 + M_1Y_1 + N_1X_1 = LZ + MY + NX,$$

ainsi la quantité LZ + MY + NX n'a pas changé de valeur.

Considérons maintenant trois axes rectangulaires ox_1, oy_1, oz_1, ayant la même origine que les trois axes ox, oy, oz auxquels répondent les quantités X, Y, Z, L, M, N, mais d'ailleurs dirigés d'une manière quelconque dans l'espace.

Faisons

$$\begin{aligned}
&\cos.\ x_1ox = a, && \cos.\ x_1oy = b, && \cos.\ x_1oz = c,\\
&\cos.\ y_1ox = a', && \cos.\ y_1oy = b', && \cos.\ y_1oz = c',\\
&\cos.\ z_1ox = a'', && \cos.\ z_1oy = b'', && \cos.\ z_1oz = c'',
\end{aligned}$$

En se rappelant que la quantité L, est égale au double

de la somme des projections sur le plan des x, y, des triangles formés en joignant l'origine des coordonnées aux extrémités des droites qui représentent en grandeur et en direction les forces du système, et que M et N sont les quantités analogues relativement aux plans des x, z, et des y, z, il est facile de voir qu'on aura, en désignant par X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1, les valeurs de X, Y, Z, L, M, N, relatives aux nouvelles coordonnées,

$$L = L_1c'' + M_1c' + N_1c,\quad M = L_1b'' + M_1b' + N_1b,$$
$$N = L_1a'' + M_1a' + N_1a.$$

On a d'ailleurs évidemment,

$$Z = Z_1c'' + Y_1c' + X_1c,\quad Y = Z_1b'' + Y_1b' + X_1b,$$
$$X = Z_1a' + Y_1a'' + X_1a.$$

Multipliant ces équations membre à membre, et les ajoutant, on aura encore, à cause des relations qui existent entre les quantités a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'',

$$LZ + MY + NX = L_1Z_1 + M_1Y_1 + N_1X_1.$$

Cela posé soit A, A′ un système de deux résultantes des forces P, P′, P″, etc.; plaçons l'origine des coordonnées au point d'application de la force A, et prenons la direction de cette force pour axe des Z. Appliquons ensuite à l'origine des coordonnées, mais dans la direction des Z négatifs, une force égale à A, il est évident que les forces P, P′, P″, etc., et la force A dirigée suivant les Z négatifs, auront une résultante unique qui sera la force A′. Les quantités X, Y, L, M, N, relatives au système des forces P, P′, P″, etc., et aux axes que nous avons choisis, ne changeront pas par l'addition de la force égale à A et dirigée suivant les Z négatifs, seulement Z deviendra Z — A. Ainsi la quantité LZ + MY + NX deviendra L (Z — A) + MY + NX, et puisque dans ce cas il y a une ré-

sultante, on aura $L(Z - A) + MY + NX = o$, d'où $LZ + MY + NX = AL$. D'ailleurs A' étant la résultante des forces P, P', P'', etc., et de A dirigée suivant les Z négatifs, L est égal, abstraction faite du signe, au double de la projection sur le plan des x, y, du triangle formé en joignant l'origine des coordonnées aux extrémités de la droite qui représente en grandeur et en direction la force A'. Il est facile de voir que le double de cette projection a pour mesure le produit de la projection de A' sur le plan des x, y, par la plus courte distance de la direction de la force A' à l'axe des z, c'est-à-dire par la plus courte distance entre les directions des forces A et A'. Si donc nous nommons d cette plus courte distance, et δ l'angle que fait la direction de la force A' avec l'axe des Z ou avec la direction de la force A, on aura abstraction faite du signe, $L = A'D \sin. \delta$, et par conséquent

$$LZ + MY + NX = AA'D \sin. \delta.$$

Or, le second membre de cette équation est égal à six fois le volume du tétraèdre construit sur les forces A et A', donc la quantité $LZ + MY + NX$ est elle-même égale à six fois ce volume.

Pour un autre système de deux résultantes B et B', on prouvera de la même manière que six fois le volume du tétraèdre correspondant est égal à la valeur de la quantité $LZ + MY + NX$ relative aux axes que l'on aura pris, mais il a été démontré que cette quantité est la même pour tous les systèmes d'axes, donc, etc.

On peut aussi prouver, en supposant le nombre des forces P, P', P'', etc., égal à n, que la quantité $LZ + MY + NX$ est égale à six fois la somme des $\frac{n(n-1)}{2}$ tétraèdres ayant pour côtés opposés les lignes droites qui représentent ces forces prises deux à deux, les expressions des volumes de ces tétraèdres étant prises avec des signes convenables.

Les directions des forces P, P', P'', etc., et leurs points

d'application étant rapportés à trois axes rectangulaires ox, oy, oz, on aura, en employant toujours les notations de la mécanique de M. *Poisson* :

$$X = \Sigma P \cos.\alpha,\quad Y = \Sigma P \cos.\beta,\quad Z = \Sigma P \cos.\gamma,$$
$$L = \Sigma P\,(y \cos.\alpha - x \cos.\beta),\quad M = \Sigma P\,(x \cos.\gamma - z \cos.\alpha),$$
$$N = \Sigma P\,(z \cos.\beta - y \cos.\alpha).$$

Il est facile de vérifier au moyen de ces valeurs que dans l'expression $LZ + MY + NX$, les coefficiens de P^2, P'^2, etc., sont tous égaux à zéro, et que l'on a

$$\begin{aligned} LZ+MY+NX = \Sigma PP'\,[&(x'-x)(\cos.\beta \cos.\gamma' - \cos.\beta' \cos.\gamma) \\ &+ (y'-y)(\cos.\gamma \cos.\alpha' - \cos.\gamma' \cos.\alpha) \\ &+ (z'-z)(\cos.\alpha \cos.\beta' - \cos.\alpha' \cos.\beta)]. \end{aligned}$$

Cela posé considérons un système de trois axes rectangulaires $o_1x_2\, o_1y_2\, o_1z_2$, et supposons que la direction de la force P coïncide avec l'axe o_1z_2 ; soient aussi L_2, M_2, N_2, les valeurs de L, M, N relatives à ces axes, et l'_2 la portion de t_2 correspondante à P'. On aura, comme plus haut, Pl'_2 égal, abstraction faite du signe, à six fois le volume du tétraèdre correspondant aux forces P et P'. Par l'origine menons maintenant trois axes o_1x_1, o_1y_1, o_1z_1 parallèles aux axes ox, oy et oz, de sorte que α, β, γ soient les angles que forme la ligne o_1z_2, qui est la direction de P, avec les nouveaux axes; représentons par L_1, M_1, N_1, les valeurs de L, M, N relatives à ces nouveaux axes, et par l'_1, m'_1, n'_1, les portions de ces quantités correspondantes à la force P'. Si x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées du point d'application de cette force par rapport aux axes o_1x_1, o_1y_1, o_1z_1, on aura

$$l'_1 = P'(y_1 \cos.\alpha' - x_1 \cos.\beta'),\quad m' = P'(x_1 \cos.\gamma' - z_1 \cos.\alpha'),$$
$$n'_1 = P'(z_1 \cos.\beta' - y_1 \cos.\alpha').$$

D'ailleurs on a aussi

$$l'_2 = l'_1 \cos.\gamma + m'_1 \cos.\beta + n'_1 \cos.\alpha$$

L'expression du sextuple du volume de la pyramide deviendra donc

$$\begin{aligned} &\mathrm{PP}' \cos.\gamma(y_1 \cos.\alpha' - x_1 \cos.\beta') \\ &+ \mathrm{PP}' \cos.\beta\,(x_1 \cos.\gamma' - z_1 \cos.\alpha') \\ &+ \mathrm{PP}' \cos.\alpha\,(z_1 \cos.\beta' - y_1 \cos.\alpha'). \end{aligned}$$

Enfin pour passer des coordonnées o_1x_1, o_1y_1, o_1z_1, aux axes ox, oy, oz, il suffit de substituer à x_1, y_1, z_1, les quantités $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$, puisque x', y', z', représentent les coordonnées du point d'application de P′ par rapport aux nouveaux axes, et x, y, z, les coordonnées de o_1, ou du point d'application de P, par rapport aux mêmes axes. Cette substitution donnera, toute réduction faite pour six fois le volume du tétraèdre correspondant aux forces P et P′, en fonction des quantités qui déterminent la position de ces forces par rapport aux axes ox, oy, oz, l'expression

$$\begin{aligned} \mathrm{PP}' \big[&(x'-x)(\cos.\beta \cos.\gamma' - \cos.\beta' \cos.\gamma) \\ &+ (y'-y)(\cos.\gamma \cos.\alpha' - \cos.\gamma' \cos.\alpha) \\ &+ (z'-z)(\cos.\alpha \cos.\beta' - \cos.\alpha' \cos.\beta)\big], \end{aligned}$$

qui est précisément égale au terme de la quantité LZ + MY + NX qui a PP′ pour facteur. On prouverait d'une manière semblable que le terme de LZ + MY + NX qui a pour facteur PP″ est égal, abstraction faite du signe, à six fois le tétraèdre construit sur les droites qui représentent en intensité et en direction les forces P et P″, et ainsi de suite, ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorèmes sur les surfaces du second degré; par M. Chasles.

On sait que de quelque manière qu'on mène trois plans rectangulaires, tangens à une surface du second degré, leur point d'intersection se trouve toujours à la même distance du centre de la surface : par conséquent la somme des carrés des distances de ces trois plans au centre de la surface est une quantité constante.

Concevons deux demi-diamètres de la surface conjugués entre eux, et parallèles au premier plan tangent : un troisième demi-diamètre, aboutissant au point de contact de ce plan, formera avec les deux premiers un système de trois demi-diamètres conjugués ; et l'on sait que le rhomboïde construit sur ces trois demi-diamètres a un volume constant Ce volume a pour expression le produit de la surface du parallélogramme construit sur les deux premiers demi-diamètres, par la distance du centre de la surface au plan tangent. Donc cette distance est égale à une constante divisée par l'aire du parallélogramme.

Pareillement, la distance du centre de la surface au second plan tangent, est égale à la même constante divisée par l'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugés, menés dans le plan diamétral parallèle à ce second plan tangent : la distance du centre au troisième plan tangent a une expression semblable. Or, nous avons dit que la somme des carrés de ces trois distances est constante ; on a donc ce théorème :

Si, dans une surface du second degré, on mène trois plans diamétraux rectangulaires, et que dans chacun d'eux on construise un parallélogramme sur deux demi-diamètres conjugués de la surface, la somme des valeurs inverses des carrés des aires de ces trois parallélogrammes aura une valeur constante.

Si la surface est un ellipsoïde, le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués, sera égal à l'aire de la section faite dans l'ellipsoïde par son plan, divisée par π (rapport de la circonférence au diamètre) ; d'où l'on conclut cette propriété de l'ellipsoïde :

De quelque manière qu'on mène dans un ellipsoïde trois plans diamétraux rectangulaires, la somme des valeurs inverses des carrés des aires des sections faites dans l'ellipsoïde par ces trois plans sera constante.

Il est clair que cela a également lieu pour l'hyperboloïde à une nappe, quand les trois plans rectangulaires le coupent suivant trois ellipses.

Maintenant si on conçoit l'hyperboloïde *conjugué* (*Correspondance*, tom. V, p. 144), et qu'on lui mène trois plans tangens parallèles aux trois plans rectangulaires, les sections que ces trois plans feront dans le cône asymptotique des deux hyperboloïdes seront des ellipses égales, respectivement aux trois sections de l'hyperboloïde à une nappe par ses trois plans diamétraux; on a donc ce théorème :

De quelque manière qu'on mène trois plans rectangulaires, tangens à un hyperboloïde à deux nappes, la somme des valeurs inverses des carrés des aires des sections elliptiques que ces plans feront dans le cône asymptotique de l'hyperboloïde aura une valeur constante.

Chartres, le 16 avril 1830.

STATISTIQUE DES TRIBUNAUX.

Relevé des crimes et délits commis dans les provinces du Brabant méridional, des deux Flandres, du Hainaut et d'Anvers, pendant l'année 1829.

Nous avons présenté dans le tome IV de la *Correspondance* des documens nombreux sur *le nombre des crimes et des délits dans les provinces du Brabant méridional, des deux Flandres, du Hainaut et d'Anvers, pendant les années* 1826, 1827 *et* 1828, pour faire suite à ceux que nous avions publiés sur le Royaume. (*Recherches statistiques sur le Royaume des Pays-Bas, in-8°*, chez

Tarlier, à Bruxelles.) Les documens que nous allons présenter pourront servir de complément aux premiers, et fourniront un nouvel argument à l'appui de ce que nous disions dans la notice qui les accompagnait.

MATIÈRE CRIMINELLE.

CRIMES CONTRE LES PERSONNES.	BRABANT mérid.	FLANDRE orient.	FLANDRE occident.	HAINAUT.	ANVERS.
Accusations.	26	29	20	10	15
Accusés	41	39	40	12	18
Acquittés	9	2	11	2	3
CRIMES CONTRE LES PROPRIÉTÉS.					
Accusations.	74	48	48	23	42
Accusés	106	76	87	31	55
Acquittés.	22	16	9	6	10

Si l'on compare ces nombres à la population respective de chaque province, on trouve dans le Brabant méridional 1 accusé sur 3389 individus ; dans la Flandre orientale 1 accusé sur 6235 ; dans la Flandre occidentale 1 accusé sur 4567 ; dans le Hainaut 1 accusé sur 13195 ; dans la province d'Anvers 1 accusé sur 4607. On voit que dans la province du Hainaut les crimes sont de moitié moins nombreux que dans les Flandres ; et quatre fois moins que dans le Brabant méridional.

	BRABANT mérid.	FLANDRE orient.	FLANDRE occident.	HAINAUT.	ANVERS.
Affaires	2862	1718	1657	1300	824
Prévenus	4012	3169	2824	1701	1295
Acquittés	1086	722	754	551	308
CONDAMNATIONS.					
A mort	»	7	1	»	1
Aux trav. forcés à perpétuité.	5	10	9	4	1
Aux travaux forcés à temps.	30	20	21	10	9
A la réclusion	36	31	34	11	15
Au carcan	»	»	»	»	»
Au bannissement	»	»	»	»	»
A la dégradation. . . .	»	1	»	»	»
A des peines correctionnelles	41	27	42	10	30
Enfans à détenir	4	1	»	»	4

En résumant ce qui se rapporte aux différentes années, on trouve pour les cours d'assises, que le nombre des accusés et des acquittés était :

ANNÉES.	CONTRE LES PERS.	ACQ.	CONT. LES PROP.	ACQUITTÉS.
1826	134	29	350	38
1827	167	33	368	47
1828	165	30	382	46
1829	150	27	355	63

et, pour les tribunaux correctionnels,

ANNÉES.	AFFAIRES.	PRÉVENUS.	ACQUITTÉS.
1826	9112	12966	3435
1827	9348	13793	2922
1828	8872	13104	3454
1829	8361	13001	3421

Nous rappellerons encore l'attention sur la presque identité des nombres de l'année 1829 avec ceux des années précédentes : nous persistons à croire que cet examen est digne d'occuper les méditations des philosophes et des hommes d'état.

Nous l'avons déjà dit ailleurs : on s'occupe de discuter sur les deniers que paie une nation aux caisses de l'état, et l'on semble à peine apercevoir le déplorable impôt qu'elle paie avec une régularité effrayante, aux prisons, aux fers et à l'échafaud. Voilà surtout les budjets qu'il faudrait s'efforcer de réduire.

Académie Royale des sciences et belles-lettres.

Séance du 3 *avril.* — *M. Dewez* donne lecture d'une lettre de *M. Bertholoni* de Bologne, et fait connaître que Sa Majesté a confirmé la nomination de *M. Van Rees*, professeur à Liége. — On vote l'impression du mémoire de *M. Chasles*, pour lequel *MM. Garnier* et *Quetelet* avaient été nommés commissaires. — *M. D'Omalius d'Halloy* lit des observations sur la division des terrains, qui seront insérées dans le recueil de l'Académie. — *M. Dumortier* lit des notices sur les manuscrits retrouvés à

la bibliothéque de Tournay. — *M. Quetelet* présente au nom de *M. Timmermans*, un mémoire manuscrit sur les pressions exercées sur les points d'appui. — *M. De Reiffenberg* lit une notice sur la famille de *Rubens* et sur des pièces inédites, pour servir de documens à l'histoire de ce peintre célèbre. — Il est fait hommage des mémoires de l'Académie de Stockholm ; des mémoires de la société de Londres, pour l'encouragement des traductions des ouvrages de littérature orientale ; de l'ouvrage sur la codification par *M. Meyer* ; de la notice et des plans des constructions romaines, trouvés sur l'emplacement présumé du Forum Hadriani près de La Haye, par *M. Reuvens*; d'expériences électro-magnétiques, par *M. Moll* ; d'un ouvrage sur les propriétés nuisibles des fourrages, par *M. Neuman*, etc. L'Académie nomme *M. De Humboldt* à l'une des deux places de membre honoraire étranger, et *M. Lévy* membre ordinaire, sauf l'approbation Royale. *M. Quetelet* donne connaissance d'expériences sur l'intensité magnétique auxquelles *MM. Lévy* et *Sauveur* ont bien voulu prendre part ; il résulte de ses expériences qu'en représentant par 1 l'intensité horizontale à Bruxelles, on a 1,025 pour Liége et pour 1,031 pour Namur.

QUESTIONS.

I. Plusieurs coniques étant inscrites ou circonscrites à un quadrilatère, quel est le lieu de leurs foyers ?

II. Quelle est sur la surface d'un cône droit la courbe qui dans le développement du cône sur un plan devient une ligne droite ?

III. Quand deux coniques semblables et semblablement placées interceptent sur une transversale des cordes égales, ces deux cordes sont vues sous des angles égaux d'un point quelconque de la perpendiculaire élevée sur la transversale par le point où elle rencontre l'axe de symptose (ou corde commune) des deux coniques.

Fig. 4.

A N P D Q M B R C

Fig. 7.

M G M¹ N H L O N¹

Lith. de Burggraaff à Brux.

Sur l'analise des fonctions angulaires ; par M. VAN RÉES, Professeur à l'Université de Liége.

La discussion qui s'était élevée il y a quelques années sur l'analise des fonctions angulaires, à l'occasion des remarques de MM. *Poisson* et *Poinsot*, paraissait entièrement terminée, lorsque M. *Crelle* a repris le même sujet dans un mémoire assez étendu, inséré dans le deuxième cahier du vol. 5 de son estimable journal. Les résultats qu'il a obtenus, n'étant pas entièrement conformes à ceux qu'on avait déjà trouvés, il a engagé les géomètres à examiner de nouveau cette théorie.

Je pense donc que les considérations suivantes ne seront pas encore superflues. Elles ont pour but d'indiquer la marche la plus simple et en même temps la plus rigoureuse pour parvenir aux divers développemens des fonctions angulaires.

Deux difficultés principales se présentent dans cette partie de l'analise. La première dérive de la multiplicité des valeurs des puissances fractionnaires. Elle est inhérente au développement de $(\sin. x)^m$ ou de $(\cos. x)^m$ en série ordonnée suivant les sinus et les cosinus des multiples de x. En effet, il est nécessaire que le développement fournisse un nombre de valeurs égal à celui de la fonction développée, et qu'on indique quelles de ces valeurs se correspondent respectivement. C'est à vaincre cette difficulté que les géomètres se sont surtout attachés jusqu'ici. Mais il est étonnant qu'ils aient gratuitement introduit cette même difficulté dans le développement des fonctions simples $\sin. mx$ et $\cos. mx$, en substituant à ces fonctions les expressions multiformes que donne le théorème de *Moivre*.

La seconde difficulté, qui me paraît n'avoir été clairement indiquée que par M. *Poisson* (*), consiste dans la nature

(*) *Bulletin des Sciences* de M. *Férussac*, vol. IV, pag. 140. Je trouve dans le même journal, vol. V, pag 250, un extrait d'un mémoire de M. *Ohm* sur le même sujet. Je regrette de n'avoir pu consulter l'original.

des développemens en séries de quantités périodiques, qui, lors même qu'elles sont convergentes pour toutes les valeurs de la variable, ne sont cependant continues que dans de certains intervalles, et peuvent changer brusquement de valeur en passant d'un intervalle à l'autre. Il s'agit donc de déterminer les grandeurs de ces intervalles, et c'est ce qui, d'après M. *Poisson*, fait la difficulté réelle de la question. Mais quoique cet illustre géomètre ait bien caractérisé la difficulté, il ne l'a cependant pas résolue, et ce point de doctrine reste à éclaircir.

J'examinerai successivement, dans ce qui va suivre, les principaux développemens des fonctions angulaires, qu'on a proposés jusqu'ici. La méthode que je suivrai sera celle de *Lagrange*. Elle consiste à exprimer par une équation différentielle linéaire la propriété caractéristique de la fonction à développer, puis à chercher l'intégrale complète de cette équation sous forme de série. Il ne reste plus alors qu'à déterminer les constantes d'intégration.

On verra par la suite de ce mémoire, que l'emploi de cette méthode permet d'écarter entièrement la première des difficultés indiquées. Mais en même temps elle fournit les élémens nécessaires pour résoudre la seconde, en faisant connaître le coefficient différentiel de la fonction que représente la série de développement. Sous ce double point de vue, elle est préférable à la méthode plus élémentaire, qui se fonde sur l'emploi du théorème de *Moivre*.

Développemens de $(\cos. x)^m$ *et* $(\sin. x)^m$ *en séries ordonnées suivant les* cosinus *ou les* sinus *des multiples décroissans de l'arc* x.

Soit d'abord $(\cos. x)^m = z$. Si on différentie cette équation, après avoir pris les logarithmes des deux membres, on trouve, en faisant disparaître les dénominateurs

$$\cos. x \frac{dz}{dx} + mz \sin. x = o. \qquad (1)$$

Faisons maintenant

$$z=A\cos.nx+B\cos.(n-1)x+C\cos.(n-2)x+D\cos.(n-3)x+\text{etc.}$$

En substituant cette valeur dans l'équation (1), et réduisant les produits de sinus et cosinus en somme de sinus, on trouve par la méthode des coefficiens indéterminés (*) :

$$n=m,\quad B=o,\quad C=\frac{m}{1}A,\quad D=o,\quad E=\frac{m-1}{2}C,\ \text{etc.}$$

donc :

$$z=A\left[\cos.mx+\frac{m}{1}\cos.(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos.(m-4)x+\text{etc.}\right]\ (2)$$

La constante A reste arbitraire, en sorte que le second membre est l'intégrale complète de l'équation (1), et comprend comme cas particulier la fonction $(\cos.\ x)^m$. Mais avant de déterminer la valeur correspondante de A, examinons de plus près la nature de la série comprise entre parenthèses, et que nous désignons par X.

Cette série est elle-même une intégrale particulière de l'équation (1). On a donc :

$$\frac{dX}{dx}=-\frac{mX\sin.\ x}{\cos.\ x}$$

(*) Les objections qu'on a faites à l'emploi de la méthode des coefficiens indéterminés dans la recherche du développement d'une fonction en série de cosinus et de sinus des multiples de la variable, prouvent uniquement que cette méthode ne fait pas toujours connaître le développement, lors même qu'il existe. La raison en est qu'une série de quantités périodiques peut être nulle dans une certaine étendue de la variable, sans que ses coefficiens soient nuls. Mais il n'est pas moins évident que lorsque par cette méthode on parvient à déterminer les coefficiens du développement, et à exprimer la fonction par une série convergente, ce résultat est aussi rigoureux que si on avait employé tout autre méthode.

ce qui prouve que l'accroissement différentiel de la série sera infiniment petit avec dx, aussi long-temps que cos. x ne sera pas nul. Considérons donc un intervalle, compris entre les valeurs $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$, $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, k étant un nombre entier quelconque. Il est d'abord évident que la série sera convergente dans toute l'étendue de l'intervalle, si elle est telle pour une seule valeur de x, qui y soit comprise. Il en est de même pour la divergence. Or, si nous faisons $x = k\pi$, il vient

$$X = \cos. mk\pi(1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \text{etc.})$$

Mais on sait que la série entre parenthèses est convergente, et qu'elle équivaut à la valeur réelle positive de $(1 + 1)^m = 2^m$, aussi souvent que $m > -1$; elle est au contraire divergente si $m = 1$ ou $m < -1$. Il en résulte que le développement (2) ne peut être employé que lorsque $m > -1$.

Examinons en second lieu quelles sont les valeurs de x, aux environs desquelles la fonction, que représente la série convergente X, peut subir un changement de forme. Or, puisque l'intégrale complète de (1), dont X est une intégrale particulière, peut aussi être exprimée par $\frac{(\cos. x)^m}{A}$, il est évident que ce changement, s'il existe, consistera dans un changement brusque de la valeur de la constante A. Mais si cos. x n'est pas nul, un tel changement produirait un accroissement fini de la fonction X, et rendrait $\frac{dX}{dx}$ infini, ce qui est impossible. Donc les changemens de valeur de la constante A ne peuvent avoir lieu que lorsque cos. $x = o$, ou $x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$.

Nous connaissons ainsi les intervalles, entre lesquels la valeur de A reste la même; ils sont tels, que cos. x est ou positif ou négatif dans toute leur étendue, suivant que k est pair ou impair. Nous n'avons plus qu'à déterminer la valeur

de cette constante dans chaque intervalle, pour que dans l'équation (2) on ait $z = (\cos. x)^m$. Mais puisque cette dernière fonction est multiforme, nous nous bornerons à la valeur réelle positive de $(\pm \cos. x)^m$, le signe + ou — devant être pris suivant que k est pair ou impair (*). On obtiendra ensuite toutes les valeurs de $(\cos. x)^m$ en multipliant par celles de $(+1)^m$ ou de $(-1)^m$. Or, si dans l'équation,

$$(\pm \cos. x)^m = A\left[\cos. mx + \frac{m}{1}\cos.(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos.(m-4)x + \text{etc.}\right]$$

on fait $x = k\pi$, il vient, en supposant toujours $m > -1$

$$1 = A \cos. mk\pi . 2^m$$

donc

$$A = \frac{1}{\cos. mk\pi , 2^m}$$

et par conséquent, entre les limites $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$, $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$,

$$(\pm \cos. x)^m = \frac{1}{2^m \cos. mk\pi}\left[\cos. mx + \frac{m}{1}\cos.(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos.(m-4)x + \text{etc.}\right]$$

ou

$$(\pm 2\cos. x)^m = \frac{1}{\cos. mk\pi}\left[\cos. mx + \frac{m}{1}\cos.(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos.(m-4)x + \text{etc.}\right] (3)$$

Telle est l'expression générale de la valeur absolue de $(\pm 1 \cos. x)^m$ en série ordonnée suivant les cosinus des multiples de l'arc. Pour avoir le développement de cette fonction en série de sinus, on n'a qu'à changer dans l'équation (2) les cosinus en sinus, et on trouve par la même analise, pour des valeurs de x comprises entre les mêmes limites $k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ et

(*) En substituant, dans ce dernier cas, $(-\cos. x)^m$, à $(\cos. x)^m$, on ne s'écarte pas de l'analise précédente, puisque l'équation (1) appartient également à l'une et à l'autre de ces fonctions.

pour $m > -1$

$$(\pm 2 \cos. x) = \frac{1}{\sin. mk\pi}[\sin. mx + \frac{m}{1} \sin. (m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2} \sin. (m-4)x + \text{etc.}] \quad (4)$$

La comparaison des équations (3) et (4) conduit encore à cette formule remarquable

$$\frac{\sin. mx + \frac{m}{1} \sin. (m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2} \sin. (m-4)x + \text{etc.}}{\cos. mx + \frac{m}{1} \cos. (m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2} \cos. (m-4)x + \text{etc.}} = \frac{\sin. mk\pi}{\cos. mk\pi}.$$

Donc si k est nul, ou en général tel que mk soit entier, on a entre les limites $x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

$$\sin. mx + \frac{m}{1} \sin. (m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2} \sin. (m-4)x = o;$$

tandis que, si mk est de la forme $\frac{2\lambda + 1}{2}$, on a

$$\cos. mx + \frac{m}{1} \cos. (m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2} \cos. (m-4)x = o$$

Dans le premier cas, le second membre de l'équation (4) et dans le second, celui de l'équation (3) prennent la forme $\frac{o}{o}$ et ne peuvent plus servir au développement de $(\cos. x)^m$.

Considérons maintenant la fonction $(\pm \sin. x)^m$. Celle-ci satisfait à l'équation différentielle

$$\sin. x \frac{dz}{dx} - nz \cos. x = o$$

qui servira à déterminer les coefficiens du développement, et qui fera en outre connaître les intervalles dans lesquels la constante d'intégration ne change pas. Il serait inutile d'en-

trer de nouveau dans les détails du raisonnement; je me bornerai à indiquer les résultats. On trouve pour la valeur absolue de $(\pm 2 \sin. x)^m$, m étant > -1 et x compris entre les limites $k\pi$ et $(k+1)\pi$,

$$(\pm 2 \sin. x)^m = \frac{1}{\cos. m\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}\left[\cos mx - \frac{m}{1}\cos.(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos.(m-4)x - \text{etc.}\right]$$

$$(\pm 2 \sin. x)^m = \frac{1}{\sin. m\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}\left[\sin. mx - \frac{m}{1}\sin.(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin.(m-4)x - \text{etc.}\right]$$

Si $m(2k+1)$ est entier, une des séries de développement sera nulle entre les mêmes limites; savoir, celle des cosinus, si $m(2k+1)$ est impair, et celle des sinus si $m(2k+1)$ est pair.

Développement de (cos. x)^m *et* (sin. x)^m *en série ordonnée suivant les cosinus ou les sinus des multiples ascendans de l'arc* x.

M. *Poisson* s'est occupé le premier de ces développemens (*Bulletin des Sciences de Férussac*, vol. IV, pag. 348). Ils donnent lieu à quelques remarques importantes.

Soit encore $(\pm \cos. x)^m = z$, donc

$$\cos. x.\frac{dz}{dx} + mz \sin. x = o \qquad (1).$$

Si on substitue dans cette équation la série

$$z = A + B\cos. x + C\cos. 2x + D\cos. 3x + \text{etc.}$$

et qu'on détermine les coefficiens par la méthode connue, on trouve que les deux premiers restent arbitraires, et en faisant

$$P = \frac{1}{2} + \frac{m}{m+2}\cos. 2x + \frac{m(m-2)}{(m+2)(m+4)}\cos. 4x + \text{etc.}$$

$$Q = \cos. x + \frac{m-1}{m+3}\cos. 3x + \frac{(m-1)(m-3)}{(m+3)(m+5)}\cos. 5x + \text{etc.}$$

on aura

$$z = AP + BQ.$$

» L'intégrale de l'équation (2), obtenue par ce moyen, » paraîtrait donc, dit M. *Poisson*, contenir deux constantes » arbitraires; mais cela n'est pas contraire aux principes du » calcul intégral, parce que les séries P et Q peuvent être » dans un rapport qui reste constant pour des étendues finies » de la variable x, et ne changent que par intervalle; ce qui » réduirait la valeur de z à ne contenir qu'une arbitraire » qui ne sera pas une constante absolue, mais une quantité » qui ne changera aussi que par intervalle. »

J'ajoute que les deux séries P et Q ne *peuvent* pas seulement être dans un rapport constant, mais *doivent* l'être nécessairement lorsque ces séries sont convergentes, ce qui a lieu pour toutes les valeurs de x, pourvu que m soit > -1; car dans ce cas elles représentent de certaines fonctions de x, qui satisfont, ainsi que la fonction AP + BQ, à l'équation (1). Or, il est impossible qu'une équation différentielle du premier ordre admette une intégrale contenant deux constantes arbitraires A et B. Donc ces constantes doivent se réduire à une seule, ce qui exige que les fonctions P et Q soient dans un rapport constant.

On peut donc prendre arbitrairement, comme intégrale complète de l'équation (1), l'une ou l'autre des expressions $z = AP$ et $z = BQ$.

Si on applique ensuite aux fonctions P et Q le raisonnement, dont nous nous sommes servis ci-dessus (pag. 5) dans une occasion pareille, on trouve que ces fonctions ne peuvent changer de forme que lorsque cos. x passe par o, et que par conséquent la valeur des constantes A et B reste la même dans l'étendue d'un intervalle compris entre

$$x = k\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Maintenant si dans les équations

$$(\pm \cos. x)^m = AP, \quad (\pm \cos. x)^m = BQ$$

on fait $x = k\pi$, on trouve, en ne considérant que la valeur absolue du premier membre, et en désignant par μ et μ' les valeurs que reçoivent P et Q lorsque $x = o$

$$A = \frac{1}{\mu} \qquad B = \pm \frac{1}{\mu'}.$$

Donc

$$(\pm \cos. x)^m = \frac{P}{\mu} \qquad (\pm \cos. x)^m = \pm \frac{P}{\mu'}$$

les signes supérieurs devant être pris lorsque k est pair, et les signes inférieurs lorsque k est impair.

En appliquant la même méthode au développement de $(\pm \cos. x)^m$ en série de la forme

$$A + B \sin. \lambda + C \sin. 2\lambda + D \sin. 3\lambda + \text{etc.}$$

on obtient des résultats contradictoires ; ce qui ne prouve pas que cette forme de développement soit absurde, mais seulement que la méthode des coefficiens indéterminés est insuffisante dans ce cas.

Quant aux développemens de $(\pm \sin. x)^m$, on les trouve sans de nouveaux calculs, en substituant dans les résultats déjà obtenus $\frac{\pi}{2} - x$ à la place de x.

Si on fait

$$P_1 = \frac{1}{2} - \frac{m}{m+2} \cos. 2x + \frac{m(m-2)}{(m+2)(m+4)} \cos. 4x - \text{etc.}$$

$$Q_1 = \sin. x - \frac{m-1}{m+3} \sin. 3x + \frac{(m-1)(m-3)}{(m+3)(m+5)} \cos. 5x - \text{etc.}$$

et qu'on désigne par μ et μ' les mêmes valeurs que ci-dessus, savoir celles qu'on obtient en faisant dans les séries P_1 et Q_1, $x = \frac{\pi}{2}$, on a pour une valeur quelconque de x

$$(\pm \sin. x)^m = \frac{P_1}{\mu}, \qquad (\pm \sin. x)^m = \pm \frac{Q_1}{\mu'}.$$

(*La suite au numéro prochain.*)

Extrait d'une lettre de M. PAGANI *à* M. QUETELET, *relative à l'intégration d'une équation aux différences partielles et à d'autres sujets.*

Dans sa *Théorie analitique des probabilités*, *Laplace* a donné, page 292 de la seconde édition, l'intégrale en série de l'équation suivante :

$$\frac{dU}{dr'} = 2U + 2\mu\frac{dU}{d\mu} + \frac{d^2U}{d\mu^2}.$$

Étant parvenu à la même expression par une méthode analogue à celle que j'ai employée pour intégrer plusieurs équations relatives à la propagation de la chaleur et au mouvement vibratoire des corps solides, je pense qu'il ne sera pas tout-à-fait inutile d'offrir ici ma solution, d'autant plus qu'elle me semble beaucoup plus simple et plus facile que celle qui est exposée par l'illustre auteur de la *Mécanique céleste.*

On satisfait à l'équation ci-dessus en prenant $U = e^{-hr'}y$, et en supposant que h dénote une constante indéterminée, et que la fonction y est donnée par l'équation

$$\frac{d^2y}{d\mu^2} + 2\mu\frac{dy}{d\mu} + (h+2)y = o.$$

Pour intégrer cette dernière, nous ferons $y = e^{-\mu^2}z$, et nous aurons pour déterminer z, cette autre équation

$$\frac{d^2z}{d\mu^2} - 2\mu\frac{dz}{d\mu} + hz = o.$$

Or, il est aisé de trouver, en employant la formule de *Maclaurin* et en nommant a et b, les valeurs de z et de $\frac{dz}{d\mu}$ correspon-

dantes à $\mu = o$, cette série

$$z = a\left[1 - \frac{h}{2}\mu^2 + \frac{h(h-4)}{2.3.4}\mu^4 - \frac{h(h-4)(h-8)}{2.3.4.5.6}\mu^6 + \text{etc.}\right]$$
$$+ b\left[\mu - \frac{h-2}{2.3}\mu^3 + \frac{(h-2)(h-6)}{2.3.4.5.}\mu^5 - \text{etc.}\right].$$

Cela posé supposons d'abord $h = o$, $a = 1$, $b = o$; nous aurons $z = 1$, $y = e^{-\mu^2}$, $U = c^{-\mu^2}$. Cette valeur de U multipliée par une constante arbitraire A_0 peut être considérée comme une intégrale particulière de l'équation proposée. Pour avoir une infinité d'autres intégrales particulières dont la somme représentera l'intégrale complète, conformément à l'esprit de la méthode que nous suivons ici, il suffit de faire, dans la série précédente, successivement

$$\begin{array}{lll} h = 2, & a = o, & b = 1; \\ h = 4, & a = 1, & b = o; \\ h = 6, & a = o, & b = 1; \\ h = 8, & a = 1, & b = o; \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}; \end{array}$$

ce qui nous fournit pour z, les valeurs

$$\mu, \quad 1 - 2\mu^2, \quad \mu(1 - \frac{2}{3}\mu^3), \quad 1 - 4\mu^2 + \frac{4}{3}\mu^4, \text{ etc.}$$

En substituant successivement ces valeurs dans l'expression d'y, et ensuite dans celle de U, et en multipliant les résultats par A_0A_2, A_0A_4, A_0A_6, A_0A_8, etc., les lettres A_2A_4, etc., désignant des constantes arbitraires, on aura l'intégrale complète de la proposée, exprimée de cette manière

$$U = A_0e^{-\mu^2}\left[1 + A_2e^{-2r'}\mu + A_4e^{-4r'}(1-2\mu^2) + A_6e^{-6r'}\mu(1-\frac{2}{3}\mu^3)\right.$$
$$\left. + A_8e^{-8r'}(1-4\mu^2 + \frac{4}{3}\mu^4) + \text{etc.}\right].$$

Je profite de cette occasion pour relever une légère inadvertance échappée à *Laplace* dans la *Mécanique céleste*, et reproduite par M. *de Pontécoulant* dans sa *Théorie analitique du système du monde*. Il s'agit du mouvement rectiligne d'un point matériel attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance. En dénotant par a la distance du point matériel au centre fixe, lorsque sa vitesse est nulle, et par x cette distance après qu'il s'est approché de la quantité $a - x$, on trouve facilement que le carré de la vitesse du point matériel est proportionnelle à $\frac{1}{x} - \frac{1}{a}$. Or cette quantité devenant négative lorsque x a une valeur négative, il est évident que le point matériel ne pourra plus se mouvoir lorsqu'il sera parvenu au centre d'attraction. Il est donc inexact de dire que, dans ce cas, le mobile oscillerait de part et d'autre du centre fixe. Au reste, cette remarque n'est pas nouvelle, et se trouve dans l'*Histoire des mathématiques* de *Montucla*. Il est d'autant plus étonnant que personne ne l'ait encore reproduite depuis l'apparition du 1[er] tome de la *Mécanique céleste*. Puisque j'ai parlé de la *Théorie analitique du système du monde*, je ferai remarquer, en passant, qu'à la page 287 du premier volume, il est dit que l'orbite décrite par une planète est un cercle, si sa vitesse initiale est perpendiculaire au rayon vecteur primitif R. Cela ne suffit pas, et il faut en outre que cette vitesse soit égale à $\sqrt{\frac{\mu}{R}}$. Enfin, en faisant la substitution indiquée par l'auteur, on doit trouver $R = a(1 \pm e)$ et non la valeur rapportée dans le livre.

Extrait d'un Mémoire de géométrie sur les propriétés générales des cônes du second degré; par M. CHASLES (*).

Nous démontrons dans cet écrit, par la pure géométrie, un grand nombre de propriétés nouvelles des cônes du second degré.

Nos démonstrations qui n'exigent que la connaissance de certaines propriétés élémentaires du cercle, ont pour base cette seule propriété des cônes du second degré, savoir : *Tout cône du second degré peut être coupé suivant des cercles par deux séries de plans parallèles à deux mêmes plans fixes.*

Ces deux plans fixes, que nous supposons menés par le sommet du cône, se représentant continuellement dans cet écrit, nous avons éprouvé le besoin de les désigner par un nom particulier, et avons adopté, en attendant mieux, celui de plans *cycliques*.

Ainsi les deux plans *cycliques* d'un cône du second degré, sont deux plans menés par son sommet, de manière que tout plan parallèle à l'un d'eux coupe le cône suivant un cercle.

Avant de démontrer les propriétés des plans cycliques, nous faisons voir qu'il existe dans tout cône du second degré, deux axes fixes, non moins remarquables que ces deux plans. La propriété caractéristique de ces axes est que *tout plan perpendiculaire à l'un d'eux coupe le cône suivant une conique qui a l'un de ses foyers au point où ce plan coupe cet axe.*

Par cette raison, nous appelons ces deux axes *lignes focales* du cône. Ce sont précisément les deux droites dont M. *Magnus*, par d'autres considérations, a fait connaître deux belles propriétés.

Nous démontrons géométriquement ces deux théorèmes de M. *Magnus*, parmi une foule d'autres propriétés nouvelles des

---

(*) Le mémoire dont M. *Chasles* présente ici une analise, paraîtra dans le VIe vol. des *Mémoires de l'Académie de Bruxelles.* A. Q.

lignes focales, dont plusieurs ont une analogie parfaite avec les propriétés des foyers dans les coniques.

Nous allons extraire de notre mémoire diverses propositions relatives aux plans cycliques et aux lignes focales, qui suffiront pour faire voir combien ce sujet, dans des mains plus habiles que les nôtres, pourrait procurer de résultats intéressans et utiles pour le perfectionnement de la théorie géométrique des cônes du second degré.

THÉORÈMES RELATIFS AUX DEUX PLANS CYCLIQUES CONSIDÉRÉS SIMULTANÉMENT.

1. *Tout plan tangent à un cône du second degré, coupe les deux plans cycliques suivant deux droites qui font des angles égaux avec l'arête de contact du plan tangent.*

Et plus généralement :

2. *Le plan de deux arêtes quelconques d'un cône du second degré coupe les plans cycliques suivant deux droites qui font, respectivement avec ces deux arêtes, des angles égaux.*

3. *Deux plans tangens à un cône de second degré, suivant deux arêtes quelconques, coupent les deux plans cycliques suivant quatre droites qui sont les génératrices d'un même cône de révolution, dont l'axe est perpendiculaire au plan des deux arêtes de contact.*

4. *La somme ou la différence des angles dièdres que chaque plan tangent à un cône du second degré fait avec les deux plans cycliques, est constante.*

5. *Chaque plan tangent à un cône du second degré, coupe les deux plans cycliques suivant deux droites, telles que le produit des tangentes des demi-angles qu'elles font avec l'intersection des deux plans cycliques, est constant.*

6. *Dans tout cône du second degré, le produit des sinus des angles que chaque arête fait avec les deux plans cycliques; est constant.*

7. *Quand deux cônes du second degré ont même sommet,*

et mêmes plans cycliques, si on leur mène un plan tangent commun, les deux arêtes de contact comprises dans ce plan, feront entre elles un angle droit.

THÉORÈMES RELATIFS A UN SEUL PLAN CYCLIQUE.

8. *Dans tout cône du second degré, le rapport des sinus des angles que chaque plan tangent fait avec un plan cyclique, et avec la polaire de ce plan cyclique* (*), *est constant.*

9. *Le plan tangent à un cône du second degré, et le plan mené par l'arête de contact et par la polaire d'un plan cyclique, rencontrent ce plan cyclique suivant deux droites rectangulaires.*

10. *Deux plans tangens à un cône du second degré, et le plan des deux arêtes de contact, coupent un plan cyclique suivant trois droites dont la troisième divise en deux également l'angle des deux premières.*

11. *Deux plans tangens à un cône du second degré, et le plan mené par leur droite d'intersection et par la polaire d'un plan cyclique, rencontrent ce plan cyclique suivant trois droites, dont la troisième divise en deux également l'angle des deux premières.*

12. *Si par une droite comprise dans un plan cyclique d'un cône du second degré, on mène deux plans tangens au cône:*

1° *Le plan des deux arêtes de contact coupera le plan cyclique suivant une seconde droite qui sera perpendiculaire à la première;*

2° *La somme des valeurs inverses des tangentes trigonométriques des inclinaisons des deux plans tangens sur le plan cyclique, sera constante.*

13. *Quand un angle tétraèdre est inscrit dans un cône du second degré, l'angle que les traces de deux de ses faces con-*

(*) La droite *polaire* d'un plan, par rapport à un cône du second degré, est la droite qui passe par le centre de la section faite dans le cône par ce plan, ou par tout autre plan parallèle.

tiguës sur un plan cyclique, font entre elles, est supplément, ou l'égal de l'angle que les traces des deux autres faces sur le même plan cyclique font entre elles.

THÉORÈMES RELATIFS AUX DEUX LIGNES FOCALES CONSIDÉRÉES SIMULTANÉMENT.

14. *Les plans menés par les deux lignes focales d'un cône du second degré, et par une arête quelconque, font des angles égaux avec le plan tangent au cône suivant cette arête.*

Et plus généralement :

15. *Les plans menés par les deux lignes focales d'un cône du second degré, et par la droite d'intersection de deux plans tangens au cône, font respectivement avec ces deux plans tangens, des angles égaux.*

16. *Les quatre plans vecteurs menés par les deux lignes focales d'un cône du second degré et par deux arêtes quelconques du cône, sont tangens à un même cône de révolution, dont l'axe est la droite d'intersection des deux plans tangens au cône proposé suivant les deux arêtes.*

17. *La somme où la différence des angles que chaque arête d'un cône du second degré fait avec ses deux lignes focales, est constante.*

18. *Dans tout cône du second degré; les plans vecteurs menés par les deux lignes focales et par une arête quelconque, sont tels que le produit des tangentes trigonométriques des demi-angles qu'ils font avec le plan des deux lignes focales, est constant.*

19. *Dans tout cône du second degré, le produit des sinus des angles que chaque plan tangent fait avec les deux lignes focales, est constant.*

20. *Si d'un point d'une ligne focale d'un cône du second degré, on abaisse des perpendiculaires sur les plans tangens au cône, leurs pieds seront sur un cercle dont le plan sera perpendiculaire à la seconde ligne focale du cône.*

21. *Les projections orthogonales des deux lignes focales d'un*

cône du second degré sur les plans tangens au cône, forment un second cône du second degré qui a un double contact avec le cône proposé, et dont les plans cycliques sont perpendiculaires aux lignes focales de ce dernier.

22. *Si d'un point d'une ligne focale d'un cône du second degré on abaisse des perpendiculaires sur deux plans tangens, le plan mené par le sommet du cône, perpendiculairement à la droite qui joindra leurs pieds, passera par la seconde ligne focale du cône.*

23. *Si deux cônes du second degré, qui ont même sommet et mêmes lignes focales, se coupent, leurs plans tangens menés par chaque arête d'intersection seront à angle droit; c'est-à-dire, que les deux cônes se couperont à angles droits.*

THÉORÈMES RELATIFS A UNE SEULE LIGNE FOCALE.

Nous appelons plan *directeur* d'un cône du second degré, relatif à une ligne focale, un plan mené par le sommet du cône, de manière que tout plan qui lui sera parallèle coupera le cône suivant une conique, ayant son centre sur cette ligne focale.

24. *Dans tout cône du second degré, le rapport des sinus des angles que chaque arête fait avec une ligne focale et avec le plan directeur correspondant, est constant.*

25. *Si par une ligne focale d'un cône du second degré on mène deux plans vecteurs, dont le premier passe par une arête quelconque du cône, et le second par la droite d'intersection du plan tangent au cône suivant cette arête et du plan directeur, ces deux plans vecteurs seront à angle droit.*

26. *Si par une ligne focale d'un cône du second degré on mène trois plans vecteurs passant respectivement par deux arêtes du cône, et par la droite d'intersection des deux plans tangens au cône suivant ces arêtes, le troisième plan vecteur divisera en deux également l'angle des deux premiers.*

27. *Les plans vecteurs menés par une ligne focale d'un cône du second degré, et par deux arêtes, sont également inclinés*

sur le plan vecteur mené par la droite d'intersection du plan des deux arêtes et du plan directeur.

28. *Si par une ligne focale d'un cône du second degré, on mène un plan transversal quelconque :*

1° *Les plans tangens au cône suivant les deux arêtes comprises dans ce plan, se couperont sur le plan directeur, et le plan mené par leur droite d'intersection et par la ligne focale, sera perpendiculaire au plan transversal ;*

2° *La somme des valeurs inverses des tangentes trigonométriques des angles que les deux arêtes comprises dans le plan transversal feront avec la ligne focale, sera constante.*

29. *Quand un angle tétraèdre est circonscrit à un cône du second degré, les plans vecteurs menés par une ligne focale et par deux arêtes contiguës de l'angle tétraèdre, font entre eux un angle qui est supplément, ou l'égal de l'angle que font entre eux les plans vecteurs menés par les deux autres arêtes.*

DESCRIPTION ORGANIQUE DES CÔNES DU SECOND DEGRÉ.

Les cônes du second degré peuvent être décrits par le mouvement continu de deux angles dièdres, ou de deux angles plans. Dans le premier cas on détermine toutes les arêtes du cône, et dans le second, tous ses plans tangens.

Ces deux modes de description organique des cônes du second degré, sont fondés sur les théorèmes suivans qu'on démontre aisément par la considération des lignes focales et des plans cycliques.

30. *Si deux angles dièdres, de grandeur quelconque, mais constante, dont les arêtes sont fixes et se rencontrent, pivotent autour de ces arêtes, de maniere que deux de leurs faces se rencontrent sur un plan fixe, mené par le point d'intersection des deux arêtes, l'intersection de leurs deux autres faces engendrera un cône du second degré, qui passera par les deux arêtes fixes.*

31. *Si deux angles plans, de grandeur quelconque, mais constante, ont pour sommet commun un point fixe, autour*

duquel ils tournent dans deux plans donnés, de manière que le plan déterminé par deux de leurs côtés tourne autour d'une droite fixe menée par leur sommet commun, le plan déterminé par leurs deux autres côtés enveloppera un cône du second degré qui sera tangent aux deux plans dans lesquels se meuvent les deux angles.

Sur la surface à laquelle est tangent un liquide renfermé dans une boîte de forme cubique, par M. le Docteur Reiss.

I.

L'énoncé de la question est celui-ci :

Une boîte de forme cubique renferme un liquide. On demande la surface à laquelle le niveau du liquide est tangent dans toutes les positions que peut prendre la boîte. On pourra rendre la solution applicable à une boîte de forme quelconque.

Proposons-nous d'abord de *trouver la surface à laquelle le niveau du liquide que renferme un vase ouvert, formé par trois plans rectangulaires entre eux, est tangent dans toutes les positions que peut prendre ce vase.* Cette question revient évidemment à *trouver la surface dont les plans tangens forment, avec trois plans donnés et rectangulaires entre eux, des tétraèdres de volume constant* (*).

Pour résoudre ce problème, j'admettrai les trois plans donnés comme les plans des coordonnées. Soient X, Y, Z les axes suivant lesquels ces plans se coupent deux à deux; leur point commun d'intersection (soit A) sera l'origine des coordonnées.

(*) La courbe plane dont les tangentes forment avec deux droites données et rectangulaires entre elles, des triangles d'aire constante, est comme on sait, *l'hyperbole équilatère* dont les droites données sont les asymptotes.

Nommons aussi x, y, z les coordonnées d'un point M quelconque de la surface cherchée, et soit

$$Pdx + Qdy + Rdz = o$$

l'équation différentielle de la même surface. Faisons

$$\frac{P}{Px+Qy+Rz}=p; \quad \frac{Q}{Px+Qy+Rz}=q; \quad \frac{R}{Px+Qy+Rz}=r;$$

nous aurons

$$pdx + qdy + rdz = o. \quad \ldots\ldots \quad (I);$$
$$px + qy + rz = 1. \quad \ldots\ldots \quad (II).$$

Or, si nous nommons ξ, ν, ζ les coordonnées d'un point quelconque du plan tangent au point M, l'équation bien connue de ce plan sera

$$p\xi + q\nu + r\zeta - (px + py + rz) = o,$$

ou

$$d\xi + q\nu + r\zeta - 1 = o. \quad \ldots\ldots \quad (\text{éq. II})$$

Ce plan coupera les axes X, Y, Z en trois points, dont les distances respectives au point A seront

$$\frac{1}{p}, \quad \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{r};$$

ce dont on se persuadera en faisant successivement

$$\nu = o, \quad \zeta = o;$$
$$\xi = o, \quad \zeta = o;$$
$$\xi = o, \quad \nu = o.$$

Or, le volume du tétraèdre, formé par les trois plans des coordonnées et le plan tangent, sera égal au tiers du produit de ces

trois distances, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{3pqr}=a, \quad \text{ou} \quad pqr=\frac{1}{3a},$$

en désignant par a le volume constant du tétraèdre. Nous en tirons en différentiant

$$qr\,dp+pr\,dq+pq\,dr=0. \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}.$$

En différentiant l'équation (II), et en ayant égard à l'équation (I), on trouve

$$x\,dp+y\,dq+z\,dr=0. \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IV)};$$

et en combinant les équations (III) et (IV), il viendra

$$\frac{x}{qr}=\frac{y}{pr}=\frac{z}{pq}, \quad \text{ou} \quad px=qy=rz.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (II) nous donne

$$px=qy=rz=\frac{1}{3}, \text{ ou } \frac{1}{p}=3x\,;\frac{1}{q}=3y\,;\frac{1}{r}=3z\,;$$

d'où il s'ensuit

$$\frac{1}{3pqr}=a=9xyz,$$

ou

$$xyz=\frac{a}{9}=\text{A},$$

ce qui est l'équation de la surface cherchée. Cette surface a quatre nappes parfaitement égales ; elle est évidemment du genre hyperbolique du troisième degré. Les trois plans coordonnés en sont les trois plans asymptotes.

Il est presque inutile d'ajouter que le même genre de solution pourroit encore s'étendre au cas où les trois plans donnés ne seraient pas rectangulaires entre eux.

En partant de l'équation $xyz = A$, on peut démontrer très-facilement et d'une manière tout élémentaire que la surface dont elle est l'expression analitique possède la propriété qui nous a occupés jusqu'ici. On parviendra à cette démonstration, en considérant les tangentes menées au point M dans les plans perpendiculaires aux axes X, Y, Z. Or, les intersections de ces plans avec la surface sont des hyperboles équilatères, ce qui résulte immédiatement de l'équation $x, y, z = A$, en y considérant successivement x, y et z, comme des quantités constantes.

II.

M. *Quetelet* ayant bien voulu me faire remarquer que la surface $xyz = A$ ne résolvait pas complétement la question proposée, et que pour s'en persuader on n'avait qu'à considérer le cas où le niveau du liquide fût parallèle à une des faces du cube, j'ajouterai les considérations suivantes à la solution du problème que j'ai traité dans les lignes précédentes.

On peut supposer comme fixe un quelconque des angles solides de la boîte, de sorte que celle-ci soit assujettie à tourner autour de ce point. Désignons ce point par A, et nommons AB′, AB″, AB‴ les trois arêtes qui se coupent en A, et qui répondent aux axes X, Y, Z.

La position du liquide peut être telle qu'il ne s'étende que sur les trois faces qui concourent au point A, ou bien telle qu'il s'étende encore sur une quelconque des trois autres faces. On voit d'après cela que le problème que nous avons résolu plus haut ne se rapporte qu'au premier genre de positions, et que le second demanderait une solution particulière qui aurait une marche analogue à celle du premier problème.

Il importe encore de faire remarquer que le premier genre de positions ne saurait avoir lieu à moins que le volume du

liquide ne soit moindre que celui du tétraèdre AB'B''B'''A, c'est-à-dire moindre que le tiers du volume cubique. Mais puisqu'il est indifférent de considérer le liquide lui-même, ou bien l'espace de la boîte qu'il laisse vide, il sera facile de conclure que

Si le volume du liquide est plus petit que le tiers ou plus grand que deux tiers du volume cubique, une partie de la surface demandée sera exprimée par l'équation $xyz = A$;

Si le volume du liquide est égal au tiers ou a deux tiers du volume cubique, l'équation $xyz = A$ ne déterminera qu'un point de la surface demandée;

Et si le volume du liquide est plus grand que le tiers et plus petit que deux tiers du volume cubique, l'équation $xyz = A$ ne conviendra à aucun point de la surface demandée.

Si nous nous arrêtons au premier cas, il sera intéressant de connaître la partie de la surface $xyz = A$, qui répond à la solution de la question proposée; c'est-à-dire d'assigner les limites convenables à cette surface. Or, si nous nommons B le côté du cube, la plus grande valeur de $\frac{1}{p}$, de $\frac{1}{q}$ et de $\frac{1}{r}$, ou de $3x$, de $3y$ et de $3z$ sera nécessairement $= B$. Il faudra donc faire successivement $x = \frac{1}{3}B$, $y = \frac{1}{3}B$, $z = \frac{1}{3}B$. La première supposition nous donne

$$x = \frac{1}{3}B, \quad yz = \frac{3A}{B},$$

pour les équations de la courbe qui constitue *en partie* les limites cherchées. Mais cette courbe elle-même doit être prise entre certaines limites. Or, les plus grandes valeurs de y et de z étant $\frac{1}{3}B$, nous aurons

$$\frac{1}{3}yB = \text{ ou } > yz\left(= \frac{3A}{B}\right);$$
$$\frac{1}{3}Bz = \text{ ou } > yz\left(= \frac{3A}{B}\right);$$

ou bien

$$y = \text{ ou } > \frac{9A}{B^2}\,;\quad z = \text{ ou } > \frac{9A}{B^2}.\ (*)$$

Par conséquent les points qui limitent cette partie des limites cherchées, auront respectivement pour coordonnées

$$x=\frac{1}{3}B,\quad y=\frac{1}{3}B,\quad z=\frac{9A}{B^2}$$

$$x=\frac{1}{3}B,\quad y=\frac{9A}{B^2},\quad z=\frac{1}{3}B.$$

Si nous faisons maintenant $y=\frac{1}{3}B$, nous trouverons

$$y=\frac{1}{3}B,\quad xz=\frac{3A}{B},$$

pour les équations de la partie correspondante des limites cherchées; partie qu'on devra prendre entre des points dont les coordonnées sont respectivement

$$x=\frac{1}{3}B,\quad y=\frac{1}{3}B,\quad z=\frac{9A}{B^2};$$

$$x=\frac{9A}{B^2},\quad y=\frac{1}{3}B,\quad z=\frac{1}{3}B.$$

Si l'on répète ce raisonnement dans la supposition de $z=\frac{1}{3}B$, on verra facilement que pour trouver les limites cherchées,

---

(*) Cela suppose évidemment qu'on ait $\frac{1}{3}B > \frac{9A}{B^2}$, ou $B^3 > 27A$. Mais puisque $A=\frac{a}{9}$, on aura $B^3 > 3a$; d'où il s'ensuit que le volume du liquide doit être moindre que le tiers du volume cubique, ce que nous avions déjà remarqué.

il faut d'abord déterminer sur la surface trois points L, M, N, dont les coordonnées sont respectivement

$$x=\frac{1}{3}B,\quad y=\frac{1}{3}B,\quad z=\frac{9A}{B^2};$$

$$x=\frac{1}{3}B,\quad y=\frac{9A}{B^2},\quad z=\frac{1}{3}B;$$

$$x=\frac{9A}{B^2},\quad y=\frac{1}{3}B,\quad z=\frac{1}{3}B;$$

Ensuite on fera passer par les points L et M, L et N, M et N des plans respectivement perpendiculaires sur les axes X, Y, Z; plans qui couperont la surface suivant des hyperboles équilatérales.

La figure formée par les arcs de ces trois hyperboles, comprises entre les trois points L, M et N, constituera les limites cherchées.

Ou bien, si l'on construit sur les trois axes X, Y, Z, un cube dont le côté soit $=\frac{1}{3}B$, la partie de la surface $xyz = A$ qui répond à la solution de la question proposée, sera limitée par ce cube.

Nous voyons donc que la solution du problème qui nous a conduits à l'équation $xyz = A$, bien loin d'épuiser la question proposée, ne s'y rapporte que dans un seul cas. Pour en compléter la solution, il faudra encore avoir égard aux cas où le liquide s'étend sur plus de trois faces de la boîte, 1° de sorte qu'il n'en remplisse aucune complétement; 2° de sorte qu'il remplisse complétement une des trois faces qui concourent au point A que nous supposons être fixe; 3° de sorte qu'il remplisse complétement deux des trois faces qui concourent en A. Chacun de ces cas demande une solution particulière; et de plus les deux derniers nous conduiront chacun à trois surfaces, qui, quoique parfaitement égales, diffèrent de position, et concourent chacune à former la surface demandée. Pour

s'en convaincre, on n'a qu'à considérer, par exemple dans le second cas, qu'on doit regarder successivement chacune des trois faces qui concourent au point A comme étant complétement remplie du liquide.

On aura donc d'abord à chercher les équations de toutes ces surfaces, et puis à déterminer les limites entre lesquelles chacune d'elles doit être prise; questions qui pourront se traiter d'une manière semblable à celle dont je me suis servi pour le premier genre de positions.

La surface demandée, quoiqu'elle doive se présenter sous une forme continue, n'en est pas moins composée, dans tous les cas, des parties de plusieurs surfaces distinctes.

Lettre sur quelques problèmes de géométrie, adressée au rédacteur, par M. Steichen, candidat en sciences.

Monsieur,

Veuillez insérer dans un des numéros prochains de la *Correspondance* l'article suivant, relatif aux questions proposées à la page 61 de la dernière livraison. Il n'y a pas long-temps que je demandai à M. *Pagani* quelques éclaircissemens sur les questions résolues par M. *Reiss;* cet estimable professeur a bien voulu me montrer la véritable méthode pour résoudre ce genre de problèmes. C'est d'après cette méthode toute simple que j'ai opéré, et si je suis parvenu à quelques résultats intéressans, j'en suis redevable sans doute à M. *Pagani*.

Première Question. — On donne une courbe S *et une droite* l, *déterminer la moyenne arithmétique des angles compris entre cette droite et les tangentes à la courbe.*

Supposons que la longueur de la droite soit divisée en un nombre arbitraire de parties égales, et tirons de chacun des

points de division une tangente à la courbe. Soit ϕ l'angle formé par la droite fixe et la tangente, tirée de l'un quelconque des points dont il s'agit, en désignant par M la moyenne arithmétique demandée, par n le nombre des divisions, on aura évidemment :

$$M = \frac{\Sigma\varphi}{n} \qquad (1).$$

ou d'après une notation connue $\Sigma\varphi = \varphi + \varphi' + \varphi'' + .. + \varphi^{(n)}$; φ', φ'' ... $\varphi^{(n)}$ étant les différentes valeurs que peut prendre φ dans toute l'étendue de l. Soit λ la partie de la droite l, comptée depuis l'une de ses extrémités jusqu'au point de division quelconque que nous considérons. Il est évident qu'on aura cette seconde équation

$$l = n.\,\Delta\lambda \qquad (2).$$

$\Delta\lambda$ étant la longueur comprise entre deux points de division consécutifs. Les équations (1) (2) donnent par l'élimination de n cette autre expression :

$$M = \frac{(\Sigma.\varphi).\Delta\lambda}{l} = \frac{\Sigma.\varphi\Delta\lambda}{l} \qquad (3)$$

quand le nombre des divisions devient infini, l'intervalle $\Delta\lambda$ devient la distance entre deux points consécutifs de l, $\Sigma.\varphi\Delta\lambda$ se changera donc en $\int\varphi d\lambda$, et il viendra pour ce cas particulier:

$$M = \frac{1}{l}\int\varphi d\lambda \qquad (4).$$

Intégrant par parties, on peut donner à cette équation une autre forme quelquefois plus commode :

$$M = \frac{1}{l}\varphi\lambda. - \frac{1}{l}\int\lambda d\varphi \qquad (5).$$

Pour montrer de quelle manière on peut faire usage des formules (4), (5), je suppose que les équations de la direction de l et de la courbe proposée soient respectivement :

$$\beta = A\alpha + B; \quad F(x, y) = F = o$$

au moyen de la dernière $F = o$, on trouve facilement la différentielle de l'angle φ, exprimée en fonction de l'abscisse x; ainsi on peut poser :

$$d\varphi = fx.dx,$$

fx dénotant une quantité connue pour chaque cas particulier. D'ailleurs l'équation de la tangente $y - \beta = \frac{dy}{dx}(x - \alpha)$ se réduit au moyen de $F = o$ à cette autre :

$$\alpha = \psi(\beta, x)$$

éliminant β au moyen de l'équation de la droite, on obtient :

$$\alpha = \psi(A\alpha + B, x) \text{ ou } x = \psi_1(A, B, \alpha).$$

de là on déduira facilement $d\varphi = (fx).dx = \psi_2(A, B, \alpha)\,d\alpha$. D'un autre côté on a : $\lambda = \int\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2} = \alpha\sqrt{1 + A^2}$. Substituant ces valeurs dans la formule (5) on aura :

$$M = \text{const.} + \frac{1}{l}.\varphi\alpha.\sqrt{1 + A^2} - \frac{1}{l}\int\alpha\sqrt{1 + A^2}.\psi_2(A, B, \alpha)\,d\alpha.$$

Intégrant cette expression entre les limites convenables, on obtient la valeur de M pour chaque cas particulier du problème général. Il faut remarquer qu'on pourrait suivre un ordre quelconque d'élimination pour arriver à l'équation finale, ainsi on pourrait y conserver l'une ou l'autre des quatre variables α, β, y, x. Mais il faut toujours préparer les calculs de manière que les intégrales qu'on aura à effectuer soient

les plus simples que possible. — *Exemple.* Considérons un cercle ayant pour équation :

$$x^2 + y^2 = R^2 \dots (a),$$

dirigeons l'axe des x, parallèlement à la droite donnée, l'équation de cette dernière sera donc $\beta = \text{const.} = b$. L'équation de la tangente, passant par (α, β) sera de son côté :

$$by + \alpha x = R^2$$

et l'on aura visiblement pour l'angle φ entre la tangente et la droite donnée ;

$$\varphi = \text{arc}\left(\text{tang.} = -\frac{x}{y}\right) =$$

$$= \text{arc}\left(\text{tang.} = -\pm\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right); \quad \alpha = \frac{R^2 - \pm b\sqrt{R^2-x^2}}{x}$$

si nous désignons par m et α les distances des deux extrémités de la droite λ à l'axe des y, nous aurons

$$\lambda = m + \alpha = m + \frac{R^2 - \pm b\sqrt{R^2 - x^2}}{x}$$

$$d\varphi = \mp\frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}};$$

substituant ces valeurs dans la formule (5), en observant que $l = AB$, et qu'il faut prendre le signe négatif devant $\sqrt{R^2-x^2}$ parce que nous prenons l'angle aigu pour φ, on obtiendra :

$$M = \text{const.} + \frac{1}{l}\,\text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)\left(m + \frac{R^2 + b\sqrt{R^2-x^2}}{x}\right)$$

$$-\frac{1}{l}\int\left(m + \frac{R^2 + b\sqrt{R^2 - x^2}}{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$= C + \frac{1}{l} \text{arc (tang.} = \ldots) (\ldots) - \frac{m}{l} \text{arc}\left(\sin. = \frac{x}{R}\right)$$
$$+ \frac{mR}{l} \log. \left(\frac{R + \sqrt{R^2 - x^2}}{x}\right) + \frac{mb}{l} \log. x;$$

intégrant cette expression entre les limites $x = R$, $x = -R$, on aura la moyenne arithmétique des angles aigus compris entre la droite donnée et les tangentes. — Si on voulait avoir la valeur de M pour le cas de l'angle φ obtus, il faudrait prendre le signe positif devant $\sqrt{R^2 - x^2}$. On traiterait de la même manière tout autre exemple particulier.

Deuxième Question. — On donne une courbe et un point fixe; il s'agit de trouver la moyenne arithmétique des angles formés par les tangentes à la courbe et les rayons vecteurs, tirés du point fixe à tous les points de la courbe.

Divisons la courbe donnée en un nombre arbitraire de parties égales; soit toujours φ l'angle formé par l'un quelconque des rayons vecteurs et la tangente tirée à la courbe au point où elle est rencontrée par ce rayon, la moyenne arithmétique M sera donc exprimée par l'équation :

$$M = \frac{\Sigma, \varphi}{n}$$

soit σ la partie de l'arc courbe, comptée d'un point fixe jusqu'au point de contact qui répond à l'angle φ. Si S dénote la longueur totale de l'arc, ou ce qui revient au même, si l'on fait $\int\sqrt{dx^2 + dy^2} = S$, on aura :

$$S = n.\Delta\sigma \text{ d'ou } M = \frac{\Sigma.\varphi\Delta\sigma}{S}$$

quand n devient infini, $\Delta\sigma$ se changera en $d\sigma = dS$, $\Sigma\varphi\Delta\sigma$ deviendra $\int \varphi dS$, et nous aurons pour ce cas particulier :

$$M = \frac{1}{S} \int \varphi dS = \frac{1}{S} \varphi S - \frac{1}{S} \int S d\varphi$$

Premier Exemple. Si la courbe proposée était un cercle ayant pour équation $y^2 = 2Rx - x^2$, et que le point fixe fût placé sur la circonférence même de la courbe, on aurait :

$$\varphi = \text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{x}{\sqrt{2Rx - x^2}}\right); \; dS = \frac{Rdx}{\sqrt{2Rx - x^2}}$$

ainsi la moyenne arithmétique serait donnée par l'expression :

$$M = \frac{\int_{2R}^{o} \text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{x}{\sqrt{2Rx - x^2}}\right)\frac{Rdx}{\sqrt{2Rx - x^2}}}{S \text{ ou } 2\pi R} \ldots\ldots(m).$$

Si on demandait la valeur de M pour un arc de cercle seulement, il faudrait prendre l'intégrale précédente entre les limites qui répondent aux deux extrémités de cet arc, et remplacer la circonférence totale $2\pi R$ par la longueur de ce même arc.

La formule (m) donne le moyen de calculer la valeur de l'intégrale qui se trouve au numérateur entre deux limites quelconques $x = a$, $x = a'$, a et a' ne pouvant devenir ni plus petits que zéro, ni plus grands que $2R$. En effet soit A le point fixe situé sur la circonférence AVA'V', concevons qu'elle soit divisée en un nombre pair de parties égales à partir de A, le diamètre AA' passera donc par l'un des points de division, opposé à A. Soit en général V un de ces points, son symétrique sera V', et l'angle du rayon vecteur AV avec la tangente tV étant l'aigü AVt, celui de AV' avec t'V' sera l'angle obtus AV't', t' étant sur le prolongement de tV' ; car quand la tangente angle Vt vient toucher le cercle en V', le prolongement Vt coïncidera avec V't'. Or, il est manifeste que la somme de ces deux angles vaut deux droits, et comme ceci a lieu pour deux autres points de division quelconques V, V', il s'ensuit que la somme des angles des rayons vecteurs AV, AV', AV_1, AV_1'... est égale à autant de fois un angle droit qu'il y a de divisions, la moyenne arithmétique de cette somme

est donc égale à 90° ou à $\frac{\pi}{2}$, il est visible d'ailleurs que ce résultat est vrai pour un nombre quelconque de divisions, et l'on a pour tous les cas $M = \frac{\pi}{2}$, ainsi la formule fournira d'après cette considération :

$$\int_{2R}^{o} \text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{x}{\sqrt{2Rx - x^2}}\right)\frac{R dx}{\sqrt{2Rx - x^2}} = \frac{\pi}{2}.2\pi R = \pi^2 R \ldots (m').$$

Dénotons actuellement par m, m' ce que devient M pour les arcs respectifs $AV'V$, AV_1V_1', ou entre les limites $x = a$, $x = a'$. Soient l, l' les longueurs de ces mêmes arcs ; il est évident qu'on aura :

$$m : M :: l : 2\pi R \; ; \quad m' : M :: l' : 2\pi R \quad \text{ou} \quad m = \frac{Ml}{2\pi R}, m' = \frac{Ml'}{2\pi R}.$$

D'un autre côté l'intégrale dont il s'agit, prise entre les limites assignées, et divisée par l'arc $\int_{a}^{a'} \sqrt{dx^2 + dy^2} = (l' - l)$ doit être égale à la différence $(m' - m)$, de là je déduis :

$$\int_{a}^{a'} \text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{x}{\sqrt{2Rx - x^2}}\right)\frac{R dx}{\sqrt{2Rx - x^2}} = \frac{\pi}{2}.\frac{(l'-l)^2}{2\pi R} = \frac{1}{R}\left(\frac{l'-l}{2}\right)^2.$$

On pourrait donner à cette formule une forme beaucoup plus générale en y introduisant deux constantes de plus ; ce qui reviendrait à placer le point fixe d'une manière quelconque vis-à-vis de la circonférence. On peut aussi remplacer la transcendante arc (tang. =), par tout autre expression semblable en mettant au lieu de la tangente sa valeur en sinus, cosinus, etc., de cette manière on obtiendra les valeurs de :

$$\int_{a}^{a'} \text{arc}\left(\sin. = \sqrt{\frac{x}{2R}}\right)\frac{R dx}{\sqrt{2Rx - x^2}},$$

$$\int_{a}^{a'} \text{arc}\left(\cos. = \sqrt{\frac{2R - x}{2R}}\right)\frac{R dx}{\sqrt{2Rx - x^2}}, \text{ etc...}$$

Puis au lieu de x, dx, on peut substituer leurs valeurs en y; ce qui donne :

$$\int_b^{b'} .\text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - y^2}}{y}\right)\frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} = \ldots \frac{1}{R}\left(\frac{l' - l}{2}\right)^2 = \ldots \text{etc.}$$

observant que l'angle φ est, en général, égal à

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\log.(\cos.\varphi + \sqrt{-1}.\sin.\varphi),$$

réduisant convenablement, la deuxième formule conduira à cette autre

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_a^{a'} .\log\left(\sqrt{\frac{2R - x}{2R}} + \sqrt{-\frac{x}{2R}}\right).\frac{R dx}{\sqrt{2Rx - x^2}} = \frac{1}{R}.\left(\frac{l' - l}{2}\right)^2,$$

à laquelle on pourrait encore substituer une nouvelle en posant le logarithme de la somme :

$$\sqrt{\frac{2R - x}{2R}} + \sqrt{-\frac{x}{2R}}$$

égale à une autre variable.

On pourrait passer des coordonnées rectangles aux polaires en posant $x = r\cos.\alpha$, $y = r\sin.\alpha$; alors on aurait des expressions de la forme :

$$\int_a^{a'} \text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{2R}{\sqrt{4R^2 - \cos.^2\alpha}}\right)d\alpha,$$

$$\int_a^{a'} \text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{4R^2}{\sqrt{16R4 - r^2}}\right)dr.$$

qui donnent elles-mêmes une suite d'autres expressions.

Deuxième Exemple. — Je considère une ellipse, et je sup-

pose que le point fixe soit situé au sommet du grand axe. L'équation de la courbe sera :

$$y^2 = m^2(2ax - x^2)\,, \quad \text{ou l'on fait } m^2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

D'où :

$$\varphi = \text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{\frac{y}{x} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}}\right) = \text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{max}{(m^2a + x - m^2x)\sqrt{2ax - x^2}}\right)$$

$$dS = dx\sqrt{\frac{2ax - x^2 + m^2(a-x)^2}{2ax - x^2}}.$$

et de là suit pour M :

$$M = \frac{\int \text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{max}{(m^2a + x - m^2x)\sqrt{2ax - x^2}}\right)}{\int dx\sqrt{\frac{m^2(a-x)^2 + 2ax - x^2}{2ax - x^2}}} + \text{const.}$$

remarquant que pour les limites $x = o$, $x = 2a$, $M = \left(\frac{\pi}{2}\right)$ on aura

$$\int_{2a}^{0} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{max}{(m^2a + x - x^2)\sqrt{2ax - x^2}}\right)dx\sqrt{\frac{m^2(a-x)^2 + 2ax - x^2}{2ax - x^2}} = \frac{\pi}{2}.S.$$

S étant la longueur totale de l'ellipse. On pourrait calculer comme dans le premier exemple, la valeur de l'intégrale entre deux limites quelconques ; mais on arrive à des formules trop compliquées. On trouverait pour la parabole et l'hyperbole des résultats analogues. On pourrait même intégrer par arcs de cycloïde, en considérant l'équation en quantités finies et l'équation différentielle de cette courbe, mais je vais revenir à la question générale. Si dans les formules $M = \frac{1}{l}\int \varphi d\lambda$ $M = \frac{1}{S}\int \varphi dS$ on écrit tang. φ au lieu de l'angle φ, on en obtient

deux autres qui résolvent deux autres questions faciles à énoncer. Par rapport à la seconde formule on pourrait se proposer aussi de rechercher la courbe pour laquelle la quantité M serait une extrême grandeur. On aura par la nature de la question :

$$\delta.\left(\frac{\int\varphi dS}{S}\right)=o.$$

de là on déduit sans peine :

$$s\delta.\int\varphi\delta s-(\int\varphi ds)\delta s=o.=s(\int\varphi d\delta s+\int ds\delta\varphi)-(\int\varphi ds)\delta s$$

et comme on a par l'intégration

$$\int\varphi d.\delta s=\varphi\delta s-\int\delta s d\varphi$$

on obtiendra pour l'équation des limites :

$$(\varphi s-\int\varphi ds)\delta s=o.$$

Et pour l'équation de la courbe cherchée :

$$ds\delta\varphi-\delta s.d\varphi=o.$$

Cette dernière est satisfaite en posant $d\varphi=o$, ou $\delta\varphi=o$; car dans l'un et l'autre cas on a $\varphi=$ const, et $\delta\varphi=o$, $d\varphi=o$. Ainsi l'équation des limites est satisfaite indépendamment de toute restriction, et l'on voit que la question se réduit à trouver la courbe pour laquelle l'angle compris entre la tangente et le rayon, tiré du point de contact à un point fixe, reste constamment le même. Or, on sait que c'est une spirale logarithmique ayant pour équation :

$$\psi+2c\log.\varsigma=\text{const.}$$

Par rapport à la formule $M=\frac{1}{l}\int\varphi d\lambda$ de la première question

on pourrait demander la courbe pour laquelle la moyenne arithmétique M a une extrême grandeur ; dans ce cas on trouverait encore $\varphi =$ const, et la ligne cherchée serait une droite ayant pour équation :

$$(A - C)x + (AC - 1)y = C'.$$

A désigne la tangente de l'angle entre l et l'axe des abscisses, C = tang. φ, et C' provient de l'intégration ; on pourrait se proposer plusieurs autres questions semblables, mais il est inutile de le faire, puisqu'elles n'offrent rien de particulier, et qu'elles se traiteraient toutes d'après des méthodes connues.

J'ai l'honneur, etc.

Louvain, le 8 mai 1830.

Propriétés générales des surfaces du second degré, par M. Chasles.

Théorème I. *Si par une courbe plane C, tracée sur une surface du second degré, on fait passer deux cônes qui aient leurs sommets en deux points de la surface, ils se couperont suivant une seconde courbe plane, dont le plan passera par le sommet du cône circonscrit à la surface, suivant la courbe C.*

En effet, soit P le plan qui contient les sommets des deux cônes menés par la courbe C, et le sommet du cône circonscrit à la surface suivant cette courbe ; ce plan coupe la surface suivant une conique, et les deux premiers cônes suivant quatre droites qui font les quatre côtés d'un quadrilatère inscrit dans la conique. Les points de concours des côtés opposés appartiennent à la seconde courbe d'intersection des deux cônes. L'une des diagonales de ce quadrilatère est l'intersection du plan de la courbe C par le plan P, et les tangentes à la conique aux extrémités de cette diagonale, sont deux arêtes du cône circonscrit à la surface suivant la courbe C ; leur point de concours est donc le sommet de ce cône. Or, ces deux tangentes se coupent sur la droite qui joint les

points de concours des côtés opposés du quadrilatère ; ce que l'on voit par le théorème de *Pascal*, en considérant les deux tangentes comme deux côtés infiniment petits d'un hexagone inscrit dans la conique dont les quatre autres côtés seraient les quatre côtés du quadrilatère. Ainsi, il est démontré que le plan de la seconde courbe d'intersection des deux cônes passe par le sommet du cône circonscrit à la surface suivant la courbe C. C. Q. F. D.

Corollaire. On sait que le cône asymptotique d'un hyperboloïde peut être considéré comme circonscrit à l'hyperboloïde, le plan de la courbe de contact étant situé à l'infini; on conclut donc du théorème précédent, celui-ci :

Si deux points pris arbitrairement sur un hyperboloïde sont les sommets de deux cônes semblables au cône asymptotique de l'hyperboloïde et semblablement placés, ces deux cônes se couperont suivant une courbe plane dont le plan passera par le centre de l'hyperboloïde.

Théorème II. *Quand trois surfaces du second degré passent par une même courbe plane, elles se coupent deux à deux suivant trois autres courbes planes, dont les plans passent par une même droite.*

En effet, tout plan transversal coupera les trois surfaces suivant trois coniques, qui auront une sécante commune ; leurs trois autres sécantes passeront donc par un même point (*Annales de Mathématiques*, avril 1828, pag. 291); ce qui prouve que les plans des trois courbes d'intersection des trois surfaces passent par une même droite.

Théorème III. *Quand quatre surfaces du second degré passent par une même courbe plane, elles se coupent deux à deux suivant six autres courbes planes dont les plans passent trois à trois par quatre droites, et ces quatre droites passent par un même point.*

Ce théorème est une conséquence évidente du précédent.

Théorème IV. *Si quatre cônes ont pour base commune une section plane C d'une surface du second degré, et pour sommet quatre points de cette surface, ils se couperont deux à*

deux suivant six courbes planes, dont les plans passeront trois à trois par quatre droites, et ces quatre droites passeront par le sommet du cône circonscrit à la surface suivant la courbe C.

Les quatre cônes étant quatre surfaces du second degré, qui passent par une même courbe plane, la première partie du théorème résulte du précédent; la seconde partie est une conséquence du théorème I.

Ainsi le théorème est démontré.

Les quatre théorèmes précédens donnent par la théorie des transformations polaires, les suivans, qu'il serait facile d'ailleurs de démontrer directement.

Théorème V. *Un cône étant circonscrit à une surface du second degré, si on le coupe par deux plans tangens à la surface, et que par les deux courbes d'intersection on fasse passer un second cône, son sommet sera sur le plan de la courbe de contact du premier avec la surface.*

Corollaire. *Si l'on a un hyperboloïde et son cône asymptotique, et qu'on mène deux plans tangens à l'hyperboloïde, par les deux courbes suivant lesquelles ils couperont le cône asymptotique, on pourra toujours faire passer un cylindre.*

Théorème VI. *Quand trois surfaces du second degré sont inscrites dans un cône, on pourra leur circonscrire, en les prenant deux à deux, trois autres cônes dont les sommets seront sur une même droite.*

Théorème VII. *Si quatre surfaces du second degré sont inscrites dans un même cône, elles ont, deux à deux, six autres cônes circonscrits, dont les sommets sont trois à trois sur quatre droites situées dans un même plan.*

Théorème VIII. *Quand un cône est circonscrit à une surface du second degré, si on le coupe par quatre plans tangens à la surface, par les quatre courbes d'intersection, prises deux à deux, on pourra faire passer six cônes dont les sommets seront trois à trois sur quatre droites comprises dans le plan de la courbe de contact du cône circonscrit à la surface.*

Les théorèmes IV et VIII ont été énoncés en d'autres ter-

mes, et sans démonstration, par M. *Bobillier*, dans les *Annales de Mathématiques* (novembre 1828).

Chartres, le 16 avril 1830.

Lettre *sur les propriétés de quelques courbes géométriques*, adressée au rédacteur par M. Le François, docteur en sciences (1).

Le sujet que j'ai pris est un problème de mathématiques pures, un cas particulier de la question proposée par vous à l'occasion de quelques expériences de M. *Plateau*, sur les intersections apparentes de deux lignes qui pivotent rapidement. En vous communiquant mon second article de la solution de cette question, j'avais eu l'honneur de vous faire part d'un théorème général concernant les courbes engendrées par deux droites, qui se meuvent dans le même sens. J'ai reconnu depuis qu'un théorème analogue avait lieu lorsque les droites tournent en sens contraire. De ces propriétés générales se déduisent fort aisément une suite d'analogies qui ne m'ont pas semblé dépourvues d'intérêt. Mais pour les exposer avec plus de simplicité, et montrer mieux les dépendances des deux familles de courbes, j'ai dû établir quelques principes qui m'ont paru susceptibles d'une grande généralité. L'ensemble de ces principes développés autant que leur nature le comporte, conduirait particulièrement à un moyen de ramener un grand nombre de propriétés des courbes et des surfaces de second ordre, à celles du cercle. J'apprendrais volontiers si cette méthode, nouvelle pour moi, l'est aussi

---

(1) M. *Le François* a publié depuis peu, à l'occasion de sa promotion au grade de docteur, des recherches très-intéressantes sur quelques courbes géométriques : *Dissertatio inauguralis de quibusdam curvis geometricis*, etc., à Gand, 1830. Je me proposais de donner une idée de ce travail, mais l'analise que l'auteur lui-même a bien voulu m'en adresser dans une lettre particulière, écrite avant sa promotion, m'a paru plus propre à remplir ce but. Elle fera mieux comprendre ses vues, tout en fournissant des preuves de sa modestie. On verra du reste que les courbes considérées se rapportent au genre des polaires réciproques. A. Q.

pour tout le monde. Permettez-moi de vous en soumettre le principe fondamental.

Je considère une surface d'un degré quelconque et de position arbitraire, par rapport à un plan et à un point C situé hors du plan. Par le point C, je mène un rayon vecteur indéfini qui rencontre le plan en un point B et la surface suivant les points A_1, A_2, A_3,..... La droite CB est divisée en deux segmens, par le point A_1; je la partage par un point A'_1 en deux nouveaux segmens, harmoniques aux premiers. Ainsi, le point A'_1 sera conjugué harmonique de A_1. On pourra de même construire les points A'_2, A'_3,... respectivement conjugués de A_2, A_3.... et la suite des nouveaux points A'_1, A'_2, A'_3,... appartiendra à une nouvelle surface conjuguée de la surface donnée, de même degré qu'elle, et présentant avec celle-ci de nombreuses analogies faciles à découvrir. Par exemple, si à égale distance du point et du plan donnés, on mène un nouveau plan, le conjugué de celui-ci sera situé à l'infini, en sorte que, autant ce plan intermédiaire déterminera de sections sur la première surface, autant la seconde aura de nappes s'étendant à l'infini, etc. Au reste, je me suis borné, dans mon mémoire, à la considération des figures planes, et je n'ai déduit de ce principe fondamental que les conséquences qui devaient m'être immédiatement utiles. Or, ce sont des analogies du genre de celles que je viens de vous indiquer, qui existent entre les deux familles de courbes engendrées par les expériences de M. *Plateau*. Vous sentirez donc jusqu'à quel point ce principe a dû m'aider dans leurs recherches; j'ai pu aussi par lui étendre à la conjugée de la focale parabolique, celles des propriétés de cette dernière découvertes par M. *Van Rees*, qui ne dépendent que de la direction indéfinie des droites. Depuis long-temps je connaissais les courbes de M. *Van Rees;* je les avais déduites de la considération des cercles orthogonaux, et j'avais obtenu pour les construire, les mêmes moyens que M. *Van Rees* déduit de leur équation. Une propriété qui leur est commune m'avait conduit à la construction de leurs tangentes,

et la même propriété donne une explication géométrique des principes sur lesquels repose son intéressant mémoire, etc.

Bruges, le 12 février 1830.

Recherches sur l'intensité magnétique de différens lieux de l'Allemagne et des Pays-Bas, par A. QUETELET (extrait d'un Mémoire lu à l'Académie de Bruxelles).

Depuis quelques années, les savans se sont occupés avec assiduité de recherches sur l'intensité magnétique, et déjà l'on est parvenu à déduire de l'ensemble de leurs observations plusieurs résultats curieux. Mais il en est de ces recherches comme de toutes celles sur lesquelles se base en général la géographie physique; ce n'est que de la multiplicité des observations faites avec des instrumens précis et sur un grand nombre de points, ce n'est que de leur discussion consciencieuse que l'on peut espérer de recueillir quelques lumières. M. *Hansteen*, l'un des physiciens qui se sont occupés avec le plus de persévérance et de succès, de tout ce qui se rapporte au magnétisme, a publié récemment, dans le journal de M. *Schumacher*, des cartes magnétiques d'après ses propres observations et celles des voyageurs les plus habiles. Le parallélisme et la régularité des lignes isodynamiques n'est certes pas un des résultats les moins curieux de ce travail; mais il serait à désirer que de nouvelles observations vinssent remplir les lacunes nombreuses qu'on remarque encore sur la carte de M. *Hansteen*, afin de vérifier si les conclusions que ce savant a déduites des recherches antérieures, se confirment ou présentent des anomalies pour quelques points particuliers.

On remarque avec peine que la carte de M. *Hansteen* ne présente, pour toute la France, qu'une seule observation de l'intensité magnétique, celle qui concerne la capitale; tandis qu'il ne s'en trouve aucune pour le royaume des Pays-Bas. J'ai profité du voyage que j'ai fait récemment en Allemagne (*voyez* les numéros précédens), pour réunir quelques nouveaux documens sur le même sujet.

L'instrument dont je me suis servi a été construit à Bruxelles, sur le modèle de celui de M. *Hansteen*, dont se sert aussi M. le capitaine *Sabine*, qui a bien voulu me le confier lors de son passage par notre ville, en 1828. Les aiguilles étaient deux petits cylindres d'acier de 66 millimètres de longueur environ, sur 4 millimètres d'épaisseur. Elles étaient terminées en pointe et suspendues à un simple fil de soie de cocon, d'environ 12 centimètres de longueur. Elles faisaient leurs oscillations dans une boîte, garnie de glaces, qui les abritait des agitations de l'air et au fond de laquelle était un cercle d'ivoire gradué d'un diamètre à peu près égal à la longueur des aiguilles. Les oscillations avaient lieu à trois centimètres d'élévation environ au-dessus du fond de la boîte, dont on assurait l'horizontalité au moyen d'un niveau à bulle d'air, et au moyen de vis qui servaient de pieds à l'instrument. Ma manière d'observer du reste était la même que celle de M. le capitaine *Sabine*.

Toutes les valeurs consignées dans le tableau suivant sont, en général, les moyennes des résultats obtenus par deux ou plusieurs séries d'observations.

Ces observations ont été réduites à la température uniforme de 12° Réaumur, afin de m'écarter le moins possible de la température moyenne à laquelle elles ont eu lieu. La formule que j'ai employée est celle de M. *Hansteen*

$$T = T' [1 - 0,000165 (t' - t)].$$

T' est le nombre de secondes que l'on a comptées pour un certain nombre d'oscillations à la température t', d'après *Fahrenheit*, et T est le nombre de secondes que l'on aurait comptées à la température donnée t, pour le même nombre d'oscillations.

Après ces réductions et après avoir fait subir aux nombres la correction provenant de la faible diminution de force magnétique qu'avaient éprouvée les deux aiguilles pendant le voyage, je suis parvenu aux valeurs suivantes :

LIEUX des OBSERVATIONS.	ÉPOQUES (1829).	OBSERVATIONS, réduites. TEMPS de 100 oscillat.	INTENSITÉ magnétique HORIZONTALE.	NUMÉRO DE L'AIGUILLE.
Bruxelles . . . . (1)	3 juillet.	374″66	1 0254	II
»	» »	392 13	1 0236	I
Altona . . . . (2)	19 »	379 38	1 0000	II
»	19 et 25 »	396 73	1 0000	I
Brême . . . . (3)	27 et 28 »	401 53	0 9785	I
Berlin (jard. de M. Mendelson) (4)	5 août.	390 70	1 0311	I
» (hôpital français) . (5)	10 »	391 57	1 0265	I
» »	» »	373 57	1 0314	II
Dresde. . . . . (6)	19 »	382 53	1 0756	I
Leipsig. . . . . (7)	24 »	386 72	1 0524	I
Weimar . . . . (8)	28 et 29 »	387 09	1 0504	I
Gotha . . . . (9)	2 septembre.	387 63	1 0475	I
Gœttingue. . . . . . (10)	4 »	390 71	1 0310	I
» (11)	» »	390 74*	1 0309	I
Cassel . . . . (12)	7 »	389 02	1 0400	I

(1) Dans un jardin à Schaerbeek, du côté de l'Observatoire.

(2) Dans le jardin de M. *Schumacher*, à l'endroit où avaient observé précédemment M. *Hansteen* et le capitaine *Sabine*.

(3) Dans un petit jardin attenant à la demeure de M. le docteur *Olbers*, et dans le jardin de l'hôtel de Lindenhofen.

(4) Dans le jardin de M. *Mendelson* où MM. *Encke*, *Poggendorf* et *Magnus* observaient la variation diurne pendant le voyage de M. *De Humboldt* en Sibérie.

(5) Dans le jardin de l'hôpital français, *Fredericstrasse*, où ont eu lieu les observations de M. le professeur *Erman*.

(6) Avec M. *Lohrmann*, sur la terrasse près du salon mathématique.

(7) Rudolfs Garten, ouest de la ville; les observations ont été faites avec MM. *Brandès* et *Mœbius*.

(8) Dans le jardin de M. *De Goethe*, près du parc de Weimar; l'autre observation a été faite sur le bord du ruisseau qui traverse le parc.

(9) Dans le jardin de M. le professeur *F. Kries*.

(10) Dans le jardin de l'Observatoire.

(11) Résultat obtenu par M. le professeur *Gauss*, qui observait en même temps que moi.

(12) Dans l'intérieur du parc.

LIEUX des OBSERVATIONS.		ÉPOQUES (1829).		OBSERVATIONS réduites. TEMPS de 100 oscillat.	INTENSITÉ magnétique HORIZONTALE.	NUMÉRO DE L'AIGUILLE.
Francfort	(1)	10	septembre.	385″16	1 0610	I
»		»	»	368 19	1 0617	II
Darmstadt	(2)	16	»	383 27	1 0715	I
Sommet du Kœnigstuhl. .	(3)	21	»	380 95	1 0846	I
Heidelberg.	(4)	22, 23, 24	»	381 93	1 0790	I
»		23 et 24	»	364 15	1 0854	II
Château de Heidelberg . .	(5)	24	»	382 24	1 0773	I
Manheim.		26	»	384 85	1 0626	I
Coblence.		28	»	386 69	1 0526	I
Bonn.	(6)	29	»	389 60	1 0370	I
Aix-la-Chapelle.	(7)	3	octobre.	390 70	1 0311	I
Maestricht	(8)	5	»	389 31	1 0385	I
Bruxelles	(9)	9	»	392 13	1 0236	I
»		»	»	374 66	1 0254	II

(1) Dans le jardin de M. le conseiller de *Sæmmerring*, à l'endroit où M. *De Humboldt* a observé l'inclin. en sep. 1826.

(2) Le mauvais temps m'a forcé de faire cette observation dans une grande chambre de l'hôtel du Raisin; par-là cette observation est peu sûre. Il en est de même de celles de Mannheim et de Coblence.

(3) Au sommet du Kœnigstuhl, environ à 1700 pieds de hauteur.

(4) Dans le jardin de M. le professeur *Geiger*.

(5) J'avais le dessein de vérifier mes résultats obtenus le 21 sur les Kœnigstuhl; mais la pluie m'ayant surpris, je me suis arrêté dans la tour octogone du château en ruines. Les observations ont été faites au 2e étage.

(6) Au pied d'une colline, à Popelsdorf.

(7) Sur un ancien bastion, au nord-ouest de la ville.

(8) Dans la carrière de la montagne de St.-Pierre.

(9) Dans le jardin de l'observatoire.

Dans le calcul de la partie horizontale de l'intensité magnétique, j'ai pris pour unité la valeur trouvée pour Altona, parce qu'ayant observé les oscillations de l'aiguille dans le jardin de M. *Schumacher*, au lieu même où MM. *Hansteen* et *Sabine* ont fait leurs observations, il me devenait plus facile de comparer mes résultats à ceux de ces savans. Ainsi, en désignant par i l'intensité horizontale pour une lieu quelconque, et par T et T′ les temps qu'emploie une même aiguille à faire 100 oscillations dans ce même lieu et à Altona, j'avais

$$i : 1 = T'^2 : T^2 ; \text{ d'où } i = \frac{T'^2}{T^2}.$$

C'est d'après cette formule qu'ont été calculés les nombres de la quatrième colonne.

J'ai réuni dans le tableau suivant le peu d'observations qui, à ma connaissance, aient été faites aux lieux où j'ai eu occasion d'observer moi-même. J'ai calculé la partie horizontale de l'intensité comme précédemment, et en prenant aussi pour unité celle qui se rapporte à Altona. Les observations de M. le capitaine *Sabine* ont eu lieu à Bruxelles, le 5 novembre 1828, vers midi, dans le jardin de l'Observatoire, avec trois aiguilles différentes et avec un appareil semblable au mien (1). Ce savant revenait alors d'Altona, où il avait aussi observé l'intensité de l'aiguille. Quant aux observations de M. *Hansteen*, je les ai recueillies dans le volume des *Astronomische Nachrichten*, n° 146, où se trouve la carte qu'il a donnée pour les *lignes isodynamiques*. Ces observations. sont relatives aux années 1825 — 1827.

---

(1) Voyez le tom. V, pag. 226 et le tom. VI, pag. 66 de la *Correspondance Mathématique et Physique*.

LIEUX DES OBSERVATIONS.	PARTIE HOR. *de l'intensité.*	DURÉE *des oscill.*	PARTIE HOR. *de l'intensité.*	OBSERVATEURS.
Altona.	1 0000	351″98	1 0000	Sabine.
»	»	311 98	»	»
»	»	344 98	»	»
»	»	774 00*	»	Hansteen.
Bruxelles.	1 0254	349 39	1 0149	Sabine.
»	1 0236	309 22	1 0179	»
»	»	342 61	1 0139	Sabine.
Berlin.	1 0288	759 20	1 0394	Hansteen.
»	1 0314	764 20	1 0258	? (1)
Leipsig	1 0524	750 30	1 0642	Hansteen.
Dresde	1 0756	747 40	1 0724	?

Ces résultats s'accordent assez bien avec ceux que j'ai obtenus de mon côté, et que j'ai indiqués dans la seconde colonne; cependant la différence entre les parties horizontales de l'intensité pour Bruxelles et Altona, est un peu plus forte que celle trouvée par M. le capitaine *Sabine*. Les nombres que j'ai obtenus pour Berlin, tombent entre ceux que donne M. *Hansteen;* en général, mes résultats confirment assez bien la direction que ce savant donne à ses lignes isodynamiques sur sa grande carte : ceux qui concernent Brême, semblent cependant former une anomalie.

Pour déterminer l'intensité totale, il faudrait connaître l'angle d'inclinaison que forme l'aiguille aimantée dans chaque lieu, et malheureusement on possède encore bien peu d'observations sur cet élément important. On trouvera dans la quatrième colonne de la table suivante, les intensités magnétiques totales calculées pour les lieux où l'inclinaison m'était connue.

(1) M. *Hansteen*, dans les *Astronomische Nachrichten*, n° 146, présente une série d'observations dues à MM. *Keilhau*, *Boeck* et *Erman*, sans indiquer l'auteur de chaque observation particulière; les nombres marqués d'un astérisque sont empruntés à la carte de ce physicien.

Dans la cinquième colonne, l'intensité totale est calculée en prenant avec MM. *Hansteen* et *De Humboldt*, pour unité, l'intensité trouvée au Pérou par 7° 1′ de latitude australe et 60° 4′ de longitude occidentale, où l'inclinaison était nulle. Ces nombres ont entre eux les mêmes rapports que ceux de la colonne précédente, et ce rapport a été pris tel que M. *Hansteen* l'a établi lui-même, en supposant l'intensité totale à Paris égale à 1,3482.

LIEUX DES OBSERVATIONS.	INTENSITÉ *horizontale.*	INCLINAISON *de l'aiguille.*(*)	INTENSITÉ *totale.*	INTENSITÉ *totale.*
Bruxelles.	1 0245	68° 56′ 5	2 851	1 3512
Berlin	1 0301	68 42	2 836	1 3440
Leipsig	1 0524	68 8 2	2 827	1 3400
Dresde	1 0756	67 41 3	2 833	1 3430
Gœttingue	1 0310	68 39	2 832	1 3422
Francfort	1 0614	67 52	2 816	1 3346

On obtient par les nombres de MM. *Sabine* et *Hansteen* :

Bruxelles	1 0156	68° 56′ 5	2 827	1 3399
Berlin	1 0394	68 42	2 861	1 3560
»	1 0258	» »	2 824	1 3385
Leipsig	1 0642	68 8 2	2 857	1 3535
Dresde	1 0724	67 41 3	2 825	1 3389

Les deux valeurs de l'intensité totale qui résultent des nombres que M. *Hansteen* a donnés pour Berlin, présentent

---

(*) L'inclinaison pour Bruxelles est la moyenne d'un grand nombre d'observations que j'ai faites en 1828 et 1829, avec un excellent instrument de *Troughton*.

J'ai préféré à l'inclinaison 68°35′,8 que M. *Hansteen* donne pour Berlin, la moyenne entre l'inclinaison 68°45′ que M. *Erman* a trouvée au mois de novembre 1826, dans le jardin de l'hôpital français, et 68°39′ que le même savant a trouvée, avec MM. *De Humboldt* et *Encke*, dans le jardin de Belle-Vue, près de Berlin, au mois de décembre de la même année. Les inclinaisons pour Gœttingue et Francfort ont été empruntées à la notice intéressante que M. *De Humboldt* a insérée dans les *Annales* de *Poggendorf*, n° 3, 1829 : la

une différence assez notable ; l'observation en a été faite déjà dans les *Annales de physique et de chimie* de M. *Poggendorf*, 1829, par M. *Erman*, à qui paraît due la dexième valeur. Du reste, les nombres calculés pour l'intensité totale doivent nécessairement inspirer moins de confiance, puisque l'inclinaison de l'aiguille est un élément variable que j'ai dû regarder comme constant, pour la période qu'embrassent les observations mentionnées dans le tableau précédent (1).

Sur l'échauffement qu'éprouve un barreau rougi par une extrémité qu'on plonge dans l'eau, par M. Crahay, professeur à l'Athénée de *Maestricht*. (*Extrait d'une lettre.*)

En causant dernièrement avec M. *Martens*, il me dit que vous l'aviez entretenu de l'observation que l'on avait faite qu'une barre de métal chauffée à une extrémité, acquerrait subitement à l'autre un accroissement de température à l'in-

---

première a été déterminée en septembre 1826, sur le penchant du Heinberg par MM. *Gauss* et *De Humboldt*, et la seconde a été déterminée vers la même époque, également par M. *De Humboldt*, dans le jardin de M. *De Sœmmerring*.

Les inclinaisons pour Leipsig et Dresde sont empruntées au mémoire de M. *Hansteen*. (*Astr. Nachrichten*, nº 146.)

(1) Depuis la lecture du mémoire dont on vient de voir un extrait, j'ai obtenu quelques nouveaux résultats pour ce royaume ; les observations pour Liége et Namur ont été faites par MM. *Lévy* et *Sauveur*.

LIEUX D'OBSERVATION.	INTENSITÉ HORIZONTALE.
Bruxelles, Observatoire	1,000.
Liége, jardin de l'Université . . .	1,025.
Namur, jardin particulier	1,031.
Louvain, jardin de M. *Van Mons*. .	1,008.

Il est à regretter que l'inclinaison de l'aiguille ne soit pas encore connue pour les trois dernières villes ; je ne pense pas non plus qu'on y connaisse sa déclinaison ; ce qui doit rassurer les personnes qui pourraient craindre qu'il ne reste plus rien à faire dans les sciences que quelques calculs, comme on l'assurait naguère dans un de nos journaux.

stant où la première était plongée dans l'eau froide (*). Depuis long-temps des ouvriers m'avaient communiqué la même chose; et moi-même je m'étais quelquefois imaginé sentir une chaleur plus forte au moment de l'immersion. Cette conversation avec M. *Martens* m'a fait exécuter quelques expériences projetées dans le but de constater le phénomène que j'avais perdu de vue. A l'une des extrémités d'un barreau cylindrique de fer de 25 centimètres de longueur sur un de diamètre, j'ai adapté un cylindre creux de laiton, ayant intérieurement une ouverture suffisante pour recevoir la boule d'un thermomètre sensible; ce cylindre de laiton, dont l'épaisseur était d'un millimètre, était fixé à frottement sur le barreau de fer, et le touchait sur une hauteur d'environ un centimètre; afin de faire mieux communiquer la température du fer au thermomètre, le creux du cercle de laiton fut rempli de mercure. Le bout inférieur du barreau fut chauffé à une température telle qu'il acquit la couleur bleue d'eau qui précède le rougissement; le thermomètre mis en place quand le barreau fut retiré du feu, monta d'abord rapidement, puis de plus en plus lentement jusqu'à ce qu'il parvînt à 46°,6 où il resta long-temps stationnaire; quand je fus bien persuadé qu'il commençait à descendre, je plongeai l'extrémité inférieure du barreau dans de l'eau à la température de + 10°, et bientôt le thermomètre descendit un peu plus rapidement, sans avoir éprouvé le moindre mouvement de hausse pendant l'immersion. Cette épreuve fut répétée plusieurs fois et toujours avec le même résultat. — Une autre fois, je fis chauffer le bout inférieur du

(*) Un physicien allemand m'avait fait part de cette observation à la réunion des naturalistes à Heidelberg d'où je revenais alors; elle me parut très-curieuse ainsi qu'à plusieurs autres personnes à qui elle fut également communiquée. A mon retour, je voulus la vérifier, mais j'obtins les mêmes résultats que M. *Crahay*; ce qui m'empêcha d'en parler alors dans la *Correspondance*. Comme néanmoins d'autres personnes pourraient se laisser induire en erreur sur cette expérience, j'ai cru utile de reproduire les observations de M. *Crahay*. A. Q.

barreau au rouge obscur, le thermomètre placé dans la cavité monta d'abord vite; à partir de 37° sa marche ascensionnelle fut régulière; plongeant le barreau dans l'eau froide, le thermomètre continua de monter encore quelque temps avec la même régularité qu'avant l'immersion, ensuite son mouvement ascendant ralentit fortement. La même expérience fut répétée en chauffant le barreau plus fortement; quand le thermomètre fut arrivé vers le 40e degré et que sa marche fut bien régulière, le barreau fut immergé, et je vis le mercure marcher encore pendant quelque temps avec la même régularité, ensuite ralentir sensiblement. Enfin le barreau fut chauffé au blanc, tenu par le bout supérieur entre deux doigts, et après l'avoir maintenu ainsi pendant quelques secondes, il fut plongé dans l'eau; la sensation de chaleur ne me sembla devenir plus forte que lorsque les mêmes doigts continuaient de tenir le barreau, car en changeant de doigts il ne me parut pas que la base communiquât sensiblement plus de chaleur *à l'instant de l'immersion*, quoique la température continuât de s'élever un peu au bout tenu entre les doigts, par suite du mouvement progressif de la chaleur de l'extrémité chauffée.

D'après cela, je crois que l'assertion relativement à l'élévation brusque de température d'une extrémité d'une barre chauffée de métal, lorsque l'autre extrémité est plongée dans l'eau froide, est erronée; l'apparence peut être attribuée à ce que la chaleur, en se propageant dans la barre, échauffe de plus en plus le bout tenu en main, de sorte qu'au moment de l'immersion, et même quelque temps après, ce bout sera plus chaud qu'auparavant; mais cet accroissement de chaleur vient uniquement de la conductibilité et aucunement de l'immersion dans l'eau froide. Ce qui peut avoir encore souvent induit en erreur à cet égard, c'est que si la barre chauffée a beaucoup de masse, et si elle est plongée verticalement dans un trop petit volume d'eau, la vapeur très-chaude qui se forme venant frapper la main y produira subitement une impression de chaleur que l'ouvrier a pu attribuer au métal qu'il tenait.

Maestricht, le 15 mai 1830.

Sur la force magnétique que peuvent prendre des barreaux de fer doux sous l'influence des courans électriques; par M. le professeur MOLL.

Nous extrayons les détails suivans d'un mémoire hollandais, intitulé *Electro-magnetische proeven*, et présenté par M. *Moll* à l'Institut des Pays-Bas, en présence duquel il a répété ses expériences le 30 janvier de cette année; nous croyons que nos lecteurs verront avec plaisir les résultats auxquels l'auteur est parvenu, en répétant une observation curieuse qui avait été faite d'abord par M. *Sturgeon* de Woolwich.

L'auteur a pris un baquet de cuivre rouge, dans lequel il a plongé une plaque de zinc dont la surface en contact avec le liquide pouvait avoir 11 pieds anglais de surface, les fils conducteurs qui partaient du cuivre et du zinc étaient de cuivre rouge et plongeaient dans de petits vases de bois remplis de mercure bien pur. Il avait fait préparer d'avance un morceau de fer doux anglais, ayant la forme d'un fer à cheval comme les aimans artificiels ordinaires. La hauteur était de $0^m,22$ = 8 1/2 pouces anglais, et l'épaisseur de $0^m,025$ = 1 pouce; au tour de ce fer était enroulé en hélice 83 fois un fil de cuivre rouge d'une épaisseur de $0^m,003$ = 1/8 pouce; le fer avec le fil qui l'entourait pouvait peser 2,5 kil. ou 5 livres. Comme dans les aimans ordinaires, aux pôles étoit adapté un porte-poids qui débordait un peu des deux côtés et qui pesait environ 630 grammes, ou 1 1/4 livre; le fer, avant l'expérience, n'était point magnétique, du moins pas d'une manière sensible. Les deux extrémités du fil qui l'entouraient furent plongées dans les petits vases où plongeaient aussi les deux fils conducteurs de l'élément voltaïque.

Au moment du contact, le fer prit une force magnétique

si grande qu'il fut capable de porter 25 kilogrammes; et avec des précautions on parvint à lui en faire porter 38, le pôle sud était à l'endroit du fer où venoit se rendre le fil conducteur en contact avec le zinc.

La rapidité avec laquelle le fer acquiert la vertu magnétique n'est pas moins remarquable que la vitesse avec laquelle on peut la faire disparaître et la faire naître de nouveau, en reversant les pôles. Que l'on se contente par exemple de faire porter une dixaine de kilogrammes au fer traversé par le courant électrique; dès que le courant sera suspendu, le fer perdra peu à peu sa vertu et le poids suspendu tombera (*). Il tombera à l'instant même, si les fils conducteurs sont changés de pôle, ce qu'il y a de remarquable, c'est que le fer lui-même éprouve presque instantanément un renversement de pôles.

Le renversement des pôles a lieu sur-le-champ, et toutes les fois qu'on fait éprouver aux fils conducteurs un changement de contact du zinc au cuivre; ce résultat doit étonner sans doute si l'on songe aux difficultés qu'on éprouve par les procédés ordinaires à renverser les pôles dans un aimant capable de porter 76 livres. Si l'on prend une aiguille légère qu'on applique par ses deux extrémités contre les deux pôles, cette aiguille ne tombe plus pendant le renversement des pôles; ce renversement se fait si subitement que l'aiguille, pendant qu'il s'opère, n'a pas le temps de vaincre la résistance de l'air et de sortir de la sphère d'attraction de l'aimant.

Si l'on soutient avec la main le morceau de fer qu'on applique contre les pôles pendant qu'on les renverse, ce renversement devient singulièrement sensible par la pression que le fer exerce un moment sur la main en retombant, et avant qu'il soit ressaisi par l'attraction des pôles qui ont changé de place.

(*) M. *Moll* dit qu'il a vu le fer à cheval dont il a été fait mention, porter 25 kilogrammes, même un quart d'heure après que le courant avait été intercepté.

L'aimant porte le plus au moment où l'on établit le contact des fils conducteurs avec l'élément voltaïque. Si l'on augmente successivement la charge et qu'elle tombe, la charge suivante ne pourra jamais redevenir aussi grande.

Si l'on frotte des aiguilles ou des barreaux d'acier sur le fer doux pendant qu'il possède la vertu magnétique par l'action des courans, on parvient à les aimanter à saturation. On peut donc communiquer un magnétisme durable par l'intermédiaire d'un corps qui perd toute sa vertu dès qu'on le soustrait à l'influence des courans électriques. On peut avec la même facilité renverser les pôles d'une aiguille ou d'un barreau déjà aimanté par les procédés ordinaires.

En soumettant le fer à cheval des expériences précédentes à l'action de deux ou de plusieurs élémens voltaïques, il ne parut pas que la force acquise en devînt plus grande; de manière que cette force semble avoir des limites. M. *Moll*, d'après le conseil de M. *Van Beek*, fit construire un fer à cheval en cuivre exactement semblable au fer employé précédemment, mais il ne parvint pas à lui communiquer de la force, quelle que fût la nature des fils conducteurs; il paraîtrait donc que le fer seul est susceptible de s'aimanter. Il fit encore quelques autres essais, et parvint à faire porter 77 kilogrammes à un fer à cheval de 13 kilogrammes qui avait $0^m,3$ de hauteur, et 55^{mm} d'épaisseur.

Un barreau d'acier, courbé en fer à cheval et déjà aimanté d'avance, fut soumis à son tour à l'action des courans électriques, comme il a été dit précédemment; mais sans aucun résultat. Cet aimant ne porta jamais que 5 livres pendant l'expérience et après, comme il l'avait fait d'abord.

On a vu un grand nombre de petits aimans porter des charges considérables comparativement à leur poids, cependant on ne connaît guère que deux ou trois grands aimans qui aient porté des charges plus fortes que les aimans obtenus par M. *Moll*; l'un d'eux est l'aimant du musée de Teyler à Harlem, qui porte ordinairement environ 200 livres, et qui, selon M. *Van Marum*, pourrait bien en porter 30 de plus.

Nous pensons que ces expériences jetteront un nouveau jour sur la théorie du magnétisme, qui doit déjà tant aux recherches des physiciens modernes.

Addition du Rédacteur. — Dans la vue de répéter les expériences précédentes avec M. *Lipkens*, inspecteur général du cadastre, j'ai fait construire un fer à cheval entouré d'un gros fil de laiton en hélice; exactement d'après les dimensions indiquées par M. *Moll*. Le fil de laiton étoit enveloppé de soie, M. *Onder de Wyngaart Cantius*, directeur de notre musée national, a bien voulu se réunir à nous pour ces expériences, et a mis à notre disposition un élément voltaïque en spirale de 2^{m},35 de longueur sur 0^{m},58 de hauteur; ce qui donnait une surface de plus de 1^{mm},36. Quelques instans après que les communications eurent été établies, le porte-poids qui pesait environ un demi-kilogramme, adhéra sans peine aux extrémités du fer à cheval. Nous y attachâmes en même temps un kilogramme; mais il nous fut impossible d'augmenter cette charge. Après quelques essais infructueux, nous répétâmes les autres parties de l'expérience. Ainsi, la charge retombait dès que les communications étaient interrompues; tandis qu'un petit fil de fer dans les mêmes circonstances adhérait encore un temps assez long. Le changement des pôles s'effectuait de la manière la plus facile; il nous fut impossible de faire porter aux pôles qui se formaient dans le fer à cheval, une aiguille d'acier d'un décimètre de longueur, quoique nous pussions y appliquer un poids de fer doux de plus de trois livres. Quelques frictions suffirent pour aimanter un petit ressort de montre. Quoique nous ayons été loin d'atteindre dans ce premier essai des effets aussi énergiques que ceux dont parle M. *Moll*, nous avons pu du moins vérifier ses résultats. Ce savant s'est assuré qu'en augmentant la surface de l'élément voltaïque, les effets obtenus n'étaient pas sensiblement amplifiés, il eût été à désirer qu'il eût indiqué aussi de combien on pouvait réduire la surface de

l'élément voltaïque sans nuire sensiblement aux effets obtenus. Cette espèce de limite serait importante à établir. Pendant que le fer à cheval portait à peu près le *maximum* de sa charge, nous avons laissé s'écouler lentement le fluide conducteur dans lequel l'élément voltaïque était plongé, et la charge ne retomba que lorsque o^m,45 de hauteur étaient déjà hors du fluide, de sorte o^m,12 seulement y plongeaient encore, c'est-à-dire environ le cinquième de l'élément. Il est vrai que l'osier qui séparait le zinc du cuivre, établissait encore des communications nombreuses hors du liquide par l'humidité qu'il avait retenue (*).

En remettant successivement le fluide que nous avions enlevé, l'action électrique recommença a échauffer les fils conducteurs, et il fut possible de faire porter de nouveau au fer à cheval sa charge primitive, quand le niveau du liquide n'était plus qu'à o^m,1 du bord supérieur de l'élément voltaïque, de manière que les 5/6 environ étaient plongés.

Nous laissâmes une seconde fois s'écouler le liquide, et quand son niveau fut à peu près à la moitié de l'élément, la charge retomba.

Le liquide fut encore remis successivement, et la charge adhéra comme la seconde fois, quand le niveau du liquide ne fut plus qu'à o^m,1 du bord supérieur de l'élément. Mais une légère secousse l'ayant détaché, il fut impossible de le faire reprendre; déjà le courant électrique avait beaucoup perdu de son énergie, car en plongeant l'élément tout entier, le *maximum* de charge qu'on put faire porter fut de deux livres tout au plus, en y comprenant un porte-poids moins pesant que celui qui avait été employé d'abord.

Peut-être le peu d'énergie que nous avons obtenue dans nos résultats tient-elle à la nature du fer employé; peut-être

---

(*) Ce qui semble confirmer ceci, c'est qu'en employant ensuite un élément voltaïque qui pouvait avoir en surface le dixième de l'élément précédent, et conséquemment la moitié de ce qui plongeait dans l'essai dont il est ici question, nous ne parvînmes jamais à faire adhérer complétement un porte-poids qui ne pesait guère qu'un quart de kilogramme.

aussi aux fils conducteurs. Nous nous proposons de répéter encore ces expériences en employant aussi un élément voltaïque nouveau.

Sur la taille moyenne de l'homme dans les villes et dans les campagnes, et sur l'âge où la croissance est complétement achevée. (Article extrait des *Annales d'Hygiène publique et de médecine légale*, 5e numéro.)

« Un *Mémoire sur la taille moyenne de l'homme en France*, a été publié par M. *Villermé*, dans le second cahier de nos *Annales*. Il en résulte, malgré tout ce qu'on a dit jusqu'aujourd'hui, que la stature de l'habitant des villes est plus haute, en général, que celle de l'habitant des campagnes, du moins jusqu'à l'âge de 21 ans accomplis. Ce résultat se trouve pleinement confirmé par les détails qu'on va lire. »

(*Fragment d'une lettre de M.* Quetelet *à M.* Villermé.)

« Les nombres suivans, relatifs à la taille de l'homme dans
» la proviuce du Brabant méridional, sont extraits du registre
» du gouvernement pour les milices.

ARRONDISSEMENS.		1823.	1824.	1825.	1826.	1827.	MOYENNES.
		mètre.	mètre.	mètre.	mètre.	mètre.	mètre.
1	Bruxelles.	1,6719	1,6640	1,6631	1,6647	1,6528	1,6633
1	Communes rurales. .	1,6325	1,6317	1,6343	1,6353	1,6296	1,6325
2	Louvain	1,6424	1,6349	1,6399	1,6460	1,6335	1,6393
2	Communes rurales. .	1,6296	1,6229	1,6090	1,6145	1,6127	1,6177
3	Nivelles	1,6398	1,6446	1,6581	1,6384	1,6330	1,6428
3	Communes rurales. .	1,6264	1,6260	1,6409	1,6431	1,6253	1,6323
Moyennes annuelles.	Villes	1,6514	1,6478	1,6537	1,6497	1,6398	1,6485
Moyennes annuelles.	Comm. rurales.	1,6295	1,6269	1,6280	1,6309	1,6225	1,6275
					Moyenne générale		1,6380

« Les moyennes pour chaque année ont été prises sur 400
» individus pour Bruxelles, et sur 150 pour Louvain et Nivel-
» les. Celles des communes rurales sont déduites de 400 indivi-

» dus pour chaque arrondissement. Ainsi la moyenne générale » pour la province entière, résulte de 3500 individus pour les » villes, et de 6000 pour les campagnes.

» On voit par les nombres précédens, comme vous l'avez » remarqué de votre côté, que l'habitant des villes est plus » grand que celui des campagnes.

» Voici quelques autres nombres que j'ai pris moi-même dans » les registres du gouvernement. Ils se rapportent à une grande » levée qui a eu lieu, il y a une quinzaine d'années. Vous y » verrez que la croissance de l'homme n'est pas entièrement » terminée à 19 ans, pas même toujours à 25. J'ai partagé mes » nombres en trois séries, et chaque série est prise sur 100 » individus. »

19 ANS.	25 ANS.	30 ANS.
mètre.	mètre.	mètre.
1,6630	1,6822	1,6834
1,6695	1,6735	1,6873
1,6620	1,6692	1,6817
1,6648	1,6750	1,6841

Tout en confirmant aussi un point des recherches de notre collaborateur, ces derniers résultats, que nous présumons avoir été fournis par les jeunes gens de la ville de Bruxelles (*), prouvent qu'il aurait pu reculer encore plus qu'il ne l'a fait, l'époque de la vie où la croissance est achevée. (Les rédacteurs des *Annales d'Hygiène*, etc.)

Documens statistiques sur le Royaume des Pays-Bas, et observations sur les tableaux publiés par la commission générale de statistique.

Depuis sa création, la commission de statistique du Royaume

(*) Ces nombres concernent effectivement la ville de Bruxelles seulement. A. Q.

des Pays-Bas a publié deux volumes de tableaux numériques. Le premier volume ne contient que des documens relatifs à la population (voyez vol. III, page 246); le second présente encore des documens sur le même sujet, ainsi que sur les tribunaux, sur le mouvement d'entrée et de sortie, sur les houillières, sur le nombre des bêtes à cornes, chevaux et moutons, etc. « Fidèle au principe qu'elle a adopté, elle se borne à ne présenter que des *chiffres* (*) ou tableaux authentiques, sans chercher à établir aucun système. » Cette marche est sans doute la meilleure, et c'est aussi celle que l'on a suivie en France, dans la publication des *Recherches statistiques sur Paris*, des *Comptes généraux de l'administration de la justice*, etc., qui peuvent servir de modèles dans leur genre. Peu de gouvernemens ont consenti jusqu'à présent à livrer au public leurs documens statistiques; on doit donc savoir gré au nôtre d'avoir été l'un des premiers à le faire. Il ne tardera pas à sentir, nous en sommes persuadés, tout l'avantage que l'on peut tirer de ces publications, quand la science, par une discussion consciencieuse et réfléchie, aura fait voir les leçons utiles qu'elles renferment.

Il n'est pas donné néanmoins à tout le monde de pouvoir bien lire dans ces documens numériques; il ne suffit pas même, pour faciliter la lecture, de présenter les rapports qui existent entre certaines données. Quelquefois ces rapports sont plutôt de nature à induire en erreur des personnes peu attentives, comme nous le ferons voir plus loin; d'ailleurs, comme l'observe judicieusement M. *J.-B. Say*, dans son excellent article *Sur l'objet et l'utilité des travaux statistiques* (*Revue encycl.*, sept. 1827), les rapports ne font que surcharger les tableaux, et peuvent être calculés sans peine par ceux qui doivent en

---

(*) Ceci ne doit certainement s'entendre que de la publication actuelle, car la commission elle-même a manifesté l'intention de donner aussi des renseignemens sur les parties de la statistique qui ne sont pas susceptibles d'être exprimées numériquement.

faire usage (*). S'il est important de bien méditer d'avance l'arrangement qu'il convient de donner à des nombres, c'est surtout dans les tableaux statistiques, c'est surtout là qu'il faut éviter de faire des répétitions inutiles, et d'établir des classifications que l'œil et l'esprit n'embrassent qu'avec peine.

Ces observations nous ont été suggérées par l'examen des deux publications qui ont été faites par la commission de statistique; et si nous les produisons ici, c'est moins dans le dessein de faire la critique de deux ouvrages fort utiles pour le fond, que dans l'espoir de voir améliorer leur forme. Les remarques suivantes sont présentées dans le même but.

Le premier volume publié par la commission de statistique, contient 31 tableaux de 42 à 45 colonnés chacun. Il nous a paru d'abord que les 11 premiers suffisaient à la rigueur, puisque les 20 autres ne faisaient qu'exprimer absolument les mêmes nombres dans un arrangement différent. D'une part en effet on voit les naissances, les décès, les mariages et les divorces, indiqués par province et année par année dans 10 tableaux suivis d'un 11[e] tableau récapitulatif. Les 20 autres tableaux reproduisent identiquement les mêmes nombres, province par province. On pourrait donc regarder ces derniers comme superflus, et réduire ainsi le volume à un tiers. Il y a plus, on pourrait réduire les 45 colonnes des 10 premiers tableaux utiles, à la moitié environ, en supprimant 6 colonnes qui expriment la différence entre les naissances et les décès dans les villes et les communes, soit en plus soit en moins, différence qu'on peut saisir à la simple lecture, ainsi que 13 colonnes présentant les rapports entre les naissances et les décès masculins et féminins, ou entre la population, les naissances, les décès, etc. L'ouvrage pourrait donc ainsi être réduit à un 6[e] de son volume, sans perdre sensiblement de son utilité.

(*) Leur emploi peut devenir nécessaire quand on traite une question spéciale, et qu'on va puiser dans les statistiques des nombres qu'on rapproche pour en déduire des conséquences.

Nous ferons à peu près les mêmes remarques pour les 20 tableaux de la population du 2e Recueil, quoiqu'ils soient moins surchargés de rapports. Il est un rapport surtout dont non-seulement nous ne sentons pas l'utilité, mais qui nous semble devoir donner des idées fausses à un lecteur peu attentif : c'est celui des mariages aux divorces. Le nombre des divorces en effet est toujours très-faible pour une province et pour une année, de sorte que le rapport devient extrêmement variable par un divorce en plus ou en moins ; il est même généralement infini, quoique les tableaux ne l'indiquent pas, puisque le nombre des divorces est assez généralement nul. On devrait éviter soigneusement d'établir des rapports entre des nombres trop faibles et dont l'un ou l'autre est le plus souvent nul. Quelle idée peut-on avoir en effet quand on voit dans le premier tableau que le rapport des mariages aux divorces a été égal à 2020 dans la province du Brabant septentrional en 1805, et que pendant neuf autres années il a été infini. La colonne où se trouve indiqué le nombre des divorces n'en dit-elle pas plus, en nous apprenant que pendant la période décennale de 1804 à 1813, il n'y a eu qu'un seul divorce, savoir dans l'année 1805.

Le nouveau Recueil renferme deux planches gravées représentant les courbes de la température pour 10 ans, et pour deux points différens du Royaume, sans aucune indication des instrumens qui ont servi aux observations, des heures auxquelles on observait, etc. On doit regretter de voir de pareilles lacunes, et surtout de ne pas trouver les nombres que figurent les courbes ; on perd ainsi la faculté de prendre les températures moyennes annuelles ou de chercher d'autres résultats intéressans.

Dans les tableaux relatifs aux *prisons*, nous avons regretté de ne trouver que le nombre des condamnés pendant la courte période de neuf mois, du 1er janvier au 15 novembre 1827. Les nombres qui s'y trouvent consignés sont trop faibles pour qu'on puisse en déduire des conséquences utiles ; c'est ce qu'on voit très-bien par le tableau où est calculée la durée moyenne de la peine pour chaque espèce de délit. Il en résulterait en

effet que dans les prisons de Gouda et de Rotterdam la durée moyenne de la peine pour menaces et tentatives d'assinat ne serait que de six mois, tandis qu'elle serait de 12 ou 15 ans dans les prisons de Leuwarde et de Bois-le-Duc. Cette estimation ne repose que sur les condamnations qu'y subissent quatre individus. On peut juger d'après cela combien serait grande l'erreur qu'on ferait en s'arrêtant à ces nombres; aussi nous pensons que le tableau en question ne pourrait donner que des idées essentiellement erronées. On ne devrait jamais perdre de vue que les moyennes déduites d'un trop petit nombre d'observations offrent des chances d'erreur trop grandes pour qu'on puisse les employer avec sûreté. Le calcul des probabilités est le guide le plus sûr qu'on puisse suivre dans ces sortes de discussions; et ce précepte s'y trouve démontré à l'évidence.

Dans un des derniers tableaux, on présente la *population probable des provinces calculée par le nombre des naissances, et le rapport des naissances à la population particulière de chaque province*. Le même calcul a été fait aussi, en faisant usage du chiffre des décès et du rapport des décès à la population. Ce qui nous a étonnés le plus, c'est de trouver chaque fois une différence entre les nombres obtenus par ce double calcul, tandis qu'ils devaient être évidemment les mêmes; car le rapport dont on fait usage pour calculer la population *probable* suppose cette population déjà connue d'une manière implicite, c'est un cercle vicieux que l'on fait. Nous étions disposés à croire d'abord qu'on avait employé pour ce calcul des rapports empruntés aux pays voisins, comme cela se pratique par fois, mais le titre même de la colonne ne pouvait nous laisser aucun doute à cet égard; faute d'explication suffisante, nous avons cru aussi qu'on avait employé les rapports actuels des provinces, mais les résultats ne doivent pas en devenir plus satisfaisans.

Nous craignons de donner trop de développement à nos observations; comme ces observations d'ailleurs ne portent que sur les parties défectueuses des *tableaux statistiques*, on serait peut-être porté à prendre une idée défavorable de cette

publication, notre intention n'a certainement pas été de la faire naître; nous nous proposons au contraire de montrer dans un prochain numéro les résultats intéressans qu'on peut en déduire, et l'utilité qu'y trouveront les amis des sciences. Nous présenterons en même temps les extraits les plus propres à intéresser nos lecteurs.

Nouvelles et annonces scientifiques.

— Nous avons reçu de M. *Gambart*, en date du 22 avril 1830, la lettre suivante :

« Hier matin 21, on a observé à Marseille une comète dans la constellation du *petit cheval*, par envion 317° 27′ d'ascension droite et 8° 37′ de déclinaison. Il était 4^h 1/4.

» Aujourd'hui à 17^h 49′ 10″ de temps sidéral, la même comète suivait l'étoile δ du *petit cheval* de 4′ 1,″4 et se trouvait plus nord de 10′ 54″.

» Cette comète est très-apparente. »

Cette comète a été aperçue aussi à Paris par M. *Nicollet*, avant que cet astronome eût reçu l'annonce de M. *Gambart*.

— M. *Gautier*, directeur de l'observatoire de Genève, nous a écrit depuis que la comète, le 20 mai vers 11^h 1/2 du soir, était près de l'étoile *f* de *Pégase*, par environ 320° 45′ d'ascension droite et 22° 52′ de déclinaison boréale; sa lumière avait déjà bien diminué, et sa queue était à peine d'un quart de degré.

— Nous croyons pouvoir annoncer aux personnes qui prennent quelqu'intérêt à la construction de l'observatoire de Bruxelles, que cet édifice sera entièrement achevé vers la fin de cette année, et pourra recevoir la belle lunette méridienne de M. *Gambey*. Nous apprenons d'une autre part, d'après les informations que M. *Herschel* a bien voulu prendre pour nous sur les lieux, que l'équatorial de MM. *Troughton* et *Simms*, sera achevé à la Noël, et que le grand cercle mural des mê-

mes artistes, sera très-probablement achevé dans le courant de l'année prochaine.

S. M. le roi des Pays-Bas, lors de son dernier voyage à Bruxelles, et dans une promenade qu'il faisoit seul et à pied le long des boulevards, est allé visiter l'observatoire qui lui doit son existence.

— Une des pendules astronomiques destinées à notre observatoire, sera construite par notre compatriote M. *Kessels*, de Maestricht, actuellement à Altona, où il a fait un grand nombre de chronomètres et de pendules pour les principaux observatoires de l'Allemagne. M. *Kessels* a été décoré par le roi de Danemarck; il est frère du célèbre statuaire de même nom. Une autre pendule a été faite chez M. *Knebel*, d'Amsterdam.

— Nous devons à l'obligeance de M. *Courtois*, auteur de la *Statistique de la province de Liége*, la communication d'un mémoire manuscrit d'où nous extrayons les données suivantes, sur le mouvement de la population des villes de Liége, Verviers, Huy, Stavelot, Herve, Limbourg et Visé, pendant la période décennale de 1817 à 1826 inclusivement.

VILLES.	POPULATION au 1er janv. 1817.	POPULATION au 1er janv. 1827.	MARIAGES.	NAISSANCES. masc.	NAISSANCES. fém.	DÉCÈS. masc.	DÉCÈS. fém.
Liége	47475	53512	3797	9269	8806	7269	7507
Verviers.	10013	18025	1243	3469	3273	2677	2712
Huy	5847	6376	423	1039	1022	746	736
Stavelot	3148	3544	269	533	474	424	417
Herve.	2785	2949	228	536	532	420	470
Limbourg	1983	1873	138	365	336	299	283
Visé	1728	1795	95	258	241	172	195

— D'après le recensement de la population juive que donnait récemment un journal, il faudrait compter un individu de cette religion sur 361 habitans, en France; sur 852, en Angleterre; sur 300, en Danemarck; sur 43 dans le Pays-Bas; sur 72, en Autriche; sur 94, dans les autres états d'Allemagne; sur 84, en Prusse; sur 77, en Russie; sur 5177, en Suède et en Norwège;

sur 1167, en Suisse; sur 417, en Italie; enfin sur 29, en Turquie. En considérant l'Europe entière, le nombre est d'environ 1 sur 100.

— Les libraires *Broese* et comp. de Breda, viennent de publier le prospectus d'un nouveau journal hollandais qui aura pour rédacteurs, MM. *F. P. Gisius Nanning* et *J. C. Van Ryneveld*, tous deux officiers de l'armée belge. Cette publication sera intitulée *la Pallas*, et comprendra deux parties; l'une consacrée à des annonces et à des examens d'ouvrages sur l'art militaire, et l'autre à des mélanges. Nous annoncerons la première livraison dès qu'elle aura paru.

— On lit dans les *annales des sciences d'observation* une notice sur le magnétisme terrestre par M. *Legrand*. Il a semblé à l'auteur qu'on s'est trop habitué à considérer séparément les déclinaisons et les inclinaisons de l'aiguille magnétique; tandis que, si l'on pouvait espérer d'arriver à quelque loi simple, c'était en combinant ces deux élémens, afin d'avoir le mouvement absolu de l'aiguille. Il a trouvé qu'une pareille aiguille décrit une surface conique, dont il a cherché l'intersection par le plan de l'équateur terrestre. Ainsi en faisant usage des observations de Paris, de 1671 à 1819, l'auteur trouve que l'axe du cône décrit par l'aiguille aimantée fait un angle de 25°39′ avec le plan de l'équateur terrestre; que l'ouverture de ce cône est de 17° 19′, et que l'axe parcouru par sa génératrice, sur le cercle qui lui sert de base, a été de 69° 9′ 15″ depuis 1666, époque où la déclinaison était nulle, jusqu'en 1819, époque de la déclinaison *maximum*; et si l'on suppose que ce mouvement est uniforme, ou de 27′ 7″,06 par an, il devient possible de calculer la déclinaison et l'inclinaison de l'aiguille pour toutes les époques.

Les mêmes annales contiennent des recherches très-intéressantes de M. *Saigey* sur la communication du monvement à distance, et en particulier du magnétisme en mouvement ou pa rrotation.

— Le cahier de la *Bibliothéque universelle* pour avril 1830, contient des observations remarquables de M. *P. Hu*-

ber-Burnand, sur la neige tombée pendant les mois de janvier et février de cette année. « Cette neige était cristallisée en paillettes étoilées à six rayons, le long desquels étaient disposés d'autres brins en forme de barbes de plume, et qui, eux-mêmes portaient de semblables barbes ; l'angle sous lequel elles étaient disposées relativement aux barbes d'un degré plus élevé était toujours de 60 degrés. Ces paillettes étaient extrêmement minces, parfaitement planes, et d'une forme tout-à-fait régulière. Les 2, 3 et 4 janvier de cette année-ci elle tomba à Yverdun avec une telle abondance, qu'elle devint l'objet de l'attention générale et qu'on en parlait dans les rues comme dans les salons; on la comparaît ordinairement à des plumes. Je hasardai de la nommer *neige polaire*, me rappelant les descriptions que j'avais lues d'une neige semblable, dans les voyages du nord....; son caractère le plus remarquable était son extrême légèreté; un souffle la dispersait; les enfans avaient de la peine à en faire des pelotes, elle avait trop peu de consistance. La neige *polaire*, au lieu d'offrir le blanc éclatant des plumes du cygne, comme la neige ordinaire, offre la nuance argentée des plumes du grèbe, par l'effet du poli de ses facettes cristallines.....; je m'assurai que cette neige fondue n'occupait que la quarante-cinquième partie de son volume; pour cela, je la laissai tomber librement dans un bassin que je mesurai lorsqu'il fut exactement rempli. Il en tomba de pareille les 7, 8, 10, 11, 19, 20, 21, 29, 31 janvier et le 7 février, mais en moindre quantité. Dans l'intervalle je vis une autre espèce de neige, que je nommerai *élémentaire*; elle tombait seulement dans les jours de brouillard, et je suppose qu'elle ne se forme pas loin de la terre. C'étaient des particules excessivement fines qui ne paraissaient pas cristallisées régulièrement, et qui tombaient comme une poudre menue, mais rare; la neige polaire et la neige élémentaire offrent l'une et l'autre ceci de particulier, qu'elles tombent à une température beaucoup plus basse que la neige ordinaire; celle-ci, comme on sait, ne se montre chez nous qu'entre — 2° et + 2°, la neige polaire tombe ordinairement par des froids de — 5°

à — 10°; il en est de même de la neige élémentaire. » (*Voyez* aussi à la pag. 213 de ce vol.)

Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres.

Séance du 1er mai 1830. — Le secrétaire présente de la part de M. *Wilson* un ouvrage sur la construction d'une pyramide sur *primerose hill*, destinée à servir de cimetière général, avec une lettre de réclamation de l'auteur.

L'Académie reçoit aussi un mémoire manuscrit sur les moyens de bâtir un hôtel des archives à l'abri des incendies, par M. l'ingénieur *Louyet*, ainsi qu'un supplément au mémoire de M. *Glœsener*, sur l'action des courans électriques dans les aiguilles d'acier et de fer non aimantées. Il est fait un rapport sur le *synodicon belgicum*, de M. *De Ram*. L'Académie reçoit ensuite les rapports des commissaires sur les différens mémoires envoyés au concours.

Séance générale du 7 *et du* 8 *mai*. — Le secrétaire présente les mémoires qui ont concouru aux prix de cette année; il sont au nombre de douze. Les commissaires nommés pour les examiner donnent successivement lecture de leurs rapports, et la discussion qui s'est ouverte à ce sujet a présenté les résultats suivans pour la partie des sciences.

Le mémoire sur la troisième question, ayant pour objet *la théorie mathématique des hommes et des animaux, considérés comme agens mécaniques*, a obtenu la médaille d'argent avec une mention très-honorable. L'auteur est M. *Timmermans*, professeur de mathématiques supérieures, à l'athénée de Tournay.

Des trois mémoires qui ont été envoyés au concours sur la cinquième question, proposant *la description géologique de la province de Liége*, l'un a mérité la médaille d'or et l'au-

tre la médaille d'argent. L'auteur du premier est M. *A. H. Dumont*, membre de la Société des sciences naturelles, à Liége, et celui du second est M. *Charles-Joseph Davreux*, pharmacien à Liége, auquel, par une distinction particulière, on a accordé les honneurs de l'impression.

Le mémoire sur la sixième question, demandant *un examen philosophique des différentes méthodes employées dans la géométrie récente*, etc., a obtenu la médaille d'or. L'auteur est M. *Chasles*, ancien élève de l'école polytechnique, correspondant de l'Académie de Bruxelles, à Chartres.

On s'est occupé ensuite des questions à proposer pour le concours de 1831 et 1832, et l'on a adopté les suivantes pour la classe des sciences.

Pour 1831. — *Première question*. Décrire la constitution géologique de la province de Limbourg; déterminer avec soin les espèces minérales et les fossiles que les divers terrains renferment, et indiquer la synonymie des auteurs qui en ont déjà traité.

Deuxième question. Donner la théorie mathématique de l'homme et des animaux considérés comme agens mécaniques.

Troisième question. Comparer, pour les Pays-Bas, les avantages qui résulteraient de l'établissement des chemins de fer avec eeux qu'offrent les canaux.

Quatrième questions. On demande la théorie mathématique des vibrations intestines des corps élastiques, en ayant égard aux circonstances physiques qui atténuent d'abord et qui finissent par détruire le mouvement primitif.

Cinquième question. Exposer les phénomènes que présente le développement de l'électricité par la chaleur dans les substances cristallisées.

Pour 1832. — *Première question*. Décrire et figurer la germination de l'agaric des champs (*agaricus campestris*), et d'une espèce de lichen au choix des concurrens, ainsi que leurs développemens successifs jusqu'à la fructification.

Deuxième question. Décrire la constitution géologique de la province du Brabant méridional; déterminer avec soin les

espèces minérales et les fossiles que les divers terrains renferment, et indiquer la synonymie des auteurs qui en ont déjà traité.

Le prix de chacune des questions est une médaille d'or du poids de trente ducats. Les mémoires écrits lisiblement en latin, français, hollandais ou flamand, seront adressés franc de port, avant le 1er de février 1831, à M. Dewez, secrétaire perpétuel.

QUESTION.

Étant donnés deux cercles, si sur la droite qui joint leurs centres de similitude, comme diamètre, on décrit un troisième cercle, on sait que chacun de ses points sera le sommet de deux angles égaux circonscrits aux deux cercles proposés; on demande :

1° De démontrer que les segmens compris entre les deux angles sur la droite qui joint les centres des cercles, sont vus sous des angles égaux d'un point quelconque du troisième cercle;

2° Quels sont les théorèmes généraux corrélatifs de ces deux là en vertu du principe des transformations polaires ou de dualité;

Les théorèmes qu'on obtient en prenant pour conique auxiliaire ou directrice, un cercle, ne sont regardés que comme des cas particuliers de ces théorèmes généraux demandés.

Considérations sur la figure du soleil, puisées dans le fait : que les taches du soleil sont peu fréquentes dans l'équateur de ce corps, qu'elles sont le plus nombreuses dans certains parallèles, et qu'elles ne se montrent presque jamais à des distances de l'équateur au delà de 30 *degrés*, par M. Thilo, Professeur au Gymnase de Francfort.

1. Le fait que nous avançons est hors de toute espèce de doute. Qu'on jette seulement un coup d'œil sur les cartes où sont rassemblées les observations faites par M. *de Soemmering* pendant les derniers six mois de 1826, les six premiers de 1827, et pendant les premiers six mois de 1828. Les deux premières de ces cartes se trouvent dans le programme : *De tabulis iconographicis, quibus maculæ solis mensibus anni* 1826 *sex posterioribus et anni* 1827 *sex prioribus a Viro Ill. S. Th. a Soemmering observatæ adumbrantur*, publié par la Société des Sciences Naturelles à Francfort, à l'occasion du cinquantième anniversaire de la promotion de l'observateur au grade de docteur. La troisième carte a été insérée dans les *Annales de Physique et de Chimie*, publiées par M. *Poggendorf*, année 1828, cahier X. Les observations postérieures de M. *de Soemmering* viennent également à l'appui de notre assertion.

2. Il résulte des observations de *Scheiner* (voyez son ouvrage intitulé *Rosa Ursina*), que ce phénomène se présentait de la même manière il y a des siècles, ou du moins qu'il avait également lieu (voyez plus bas, art. 24). La surface du soleil étant divisée parallèlement à son équateur

en zones de 3 degrés de latitude, il y avait, suivant les observations de cet astronome :

	TACHES BORÉALES.	TACHES AUSTRALES.
Entre 0° et 3° de lat.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
— 3 — 6 —	$2\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$
— 6 — 9 —	$3\frac{1}{2}$	$17\frac{1}{2}$
— 9 — 12 —	3	$9\frac{1}{2}$
— 12 — 15 —	9	20
— 15 — 18 —	11	10
— 18 — 21 —	12	$1\frac{1}{2}$
— 21 — 24 —	8	0
— 24 — 27 —	1	1
— 27 — 30 —	0	0

Les taches qui se trouvaient soit dans l'équateur même, soit à 3, 6, 9 degrés de latitude, sont ici censées faire partie moitié de l'une, moitié de l'autre des zones avoisinantes. Ainsi, dans l'espace de plus de deux ans qu'embrassaient les observations de *Scheiner*, de décembre 1624 jusqu'à juin 1627, il n'y avait qu'une tache sur 123 qui, le 14 juillet 1625, se trouvait dans l'équateur ou à proximité. Les taches qui, après celles-ci, approchaient le plus de l'équateur, étaient celle du 3 mars 1826, et celle du 12 novembre 1625; la première à 3 1/3° de latitude bor., la seconde à 3 1/2° de latitude austr.; de sorte qu'il y avait autour de l'équateur une zone de 7 degrés presque entièrement exempte de taches.

3. M. *de Lindenau* fit la découverte importante que le diamètre vertical du soleil est plus grand que le diamètre horizontal; de sorte que ce corps présente la figure d'un sphéroïde aplati, non aux pôles, mais à l'équateur (voyez

la *Correspondance* de M. *de Zach*, tom. XIX, pag. 529 à 544; tom. XXI, pag. 469 à 486; voyez aussi tom. XX, pag. 83 à 87, et tom. XXII, pag. 193 à 198). Si l'on peut s'étonner avec raison d'un tel rapport, qui paraît absolument contraire à la théorie des corps célestes assujettis à tourner autour d'un axe, on ne sera pas moins surpris du fait, d'ailleurs incontestable, que les taches du soleil se montrent le plus souvent dans certains parallèles à une distance notable de l'équateur; car, si l'on fait bien attention à la figure des taches considérées isolément, ou mieux encore, réunies en groupe qu'on voit le plus souvent s'étendre parallèlement à l'équateur, on ne pourra plus mettre en doute qu'elles ne soient soumises à une influence de la force centrifuge provenant de la rotation du soleil autour de son axe. Ne croirait-on pas d'après cela que les taches sont en plus grand nombre, soit près de l'équateur, soit près des pôles, et qu'elles vont en diminuant, dans le premier cas, de l'équateur aux pôles, ou dans le cas contraire, des pôles à l'équateur ?

4. Les faits surprenans que nous venons de rapporter sont sans doute susceptibles de plusieurs explications également plausibles, ensuite desquelles ils se présenteraient comme des conséquences rigoureuses de certaines hypothèses posées avec clarté et précision. Cependant, il ne peut y en avoir qu'une seule qui soit réellement conforme à la nature.

Je vais essayer dans ce mémoire de donner au moins une des explications possibles, sans toutefois me flatter d'avoir rencontré la véritable, et d'avoir représenté toutes les circonstances d'après ce qui a réellement lieu. Les recherches suivantes se diviseront donc en deux parties. Dans la première, on essaiera de donner une explication du phénomène rapporté, fondée sur certaines hypothèses établies d'avance, et dans la seconde, on prouvera que les mesures faites jusqu'à présent des diamètres du soleil, si elles ne confirment pas nos hypothèses, ne contiennent du moins rien qui puisse les réfuter.

A. *Essai d'une explication du phénomène que les taches du soleil sont le plus nombreuses à une certaine distance de l'équateur.*

5. Cette explication sera fondée sur les hypothèses suivantes :

I. Je distinguerai entre le noyau du soleil et le fluide élastique qui en forme l'enveloppe (ou si on l'aime mieux les enveloppes). Les taches sont des lacunes dans cette enveloppe qui découvrent le noyau du soleil, et ces lacunes ont lieu le plus facilement, partie dans les endroits où la hauteur de l'enveloppe est la plus petite, partie dans ceux où les mouvemens ou courans qui existent dans l'enveloppe même sont les plus forts. Elles se formeront moins aisément ou deviendront impossibles, si la surface de l'enveloppe se trouve en état d'équilibre, bien que celle-ci n'ait qu'une hauteur peu considérable, ou encore si l'enveloppe est trop haute pour pouvoir s'entr'ouvrir jusqu'au noyau, quand même les mouvemens ou courans seraient très-grands.

II. Je donnerai au noyau du soleil la figure qui lui convient d'après la théorie; j'admettrai donc qu'il soit aplati aux pôles, et que l'axe en soit de 0″, 052 plus petit que le diamètre de l'équateur (*Correspondance* de M. *de Zach*, tom. IV, pag. 176). Or, d'après l'une des déterminations de M. *de Lindenau*, que je suivrai plus particulièrement (*Correspondance* de M. *de Zach*, tom. XIX, pag. 541), l'aplatissement du soleil mesuré dans son enveloppe est de $\frac{1}{279}$; par conséquent l'axe de l'enveloppe excède le diamètre de l'équateur de 6″,86 (voyez plus bas, art 13), et l'on voit que la figure de l'enveloppe s'éloigne beaucoup plus de la forme sphérique que la figure du noyau; circonstance qui permet de supposer ce dernier, dans tout ce qui va suivre, comme étant rigoureusement de forme sphérique.

III. Je supposerai encore que le noyau et l'enveloppe soient concentriques; cependant, la circonstance que l'ensemble

des taches australes est plus approché de l'équateur que celui des taches boréales, semblerait plutôt indiquer une position excentrique.

IV. Mais l'axe de l'enveloppe sera admis comme déviant d'un certain angle de l'axe du noyau. Représentons par le cercle IKL*l* et l'ellipse ADBE (fig. 1), les intersections du noyau et de l'enveloppe avec un plan passant par le centre (C); soit aussi L*l* l'axe du noyau, ou bien l'axe de rotation du soleil, et AB le grand axe de l'enveloppe. Ce dernier déviera donc du premier d'un angle LCB.

6. La découverte de M. *de Lindenau*, dont nous avons parlé ci-dessus, rapprochée de la seconde de nos hypothèses, savoir : que le noyau du soleil ait la figure qui lui convient d'après la théorie, et que ce n'est que l'enveloppe qui soit allongée suivant l'axe du soleil, semble expliquer suffisamment pourquoi on ne remarque presque plus de taches à des distances de l'équateur au delà de 30 degrés, puisque l'enveloppe deviendra, dans cette supposition, plus haute à mesure qu'on approche des pôles. Sans hasarder aucune supposition sur les causes physiques qui pourraient occasionner dans les enveloppes très-subtiles et très-légères, ce flux en A et B, et ce reflux en D et E, on peut dire que l'existence en est rendue très-probable par ce qui précède. Il n'y a donc plus rien de surprenant dans l'hypothèse que l'axe de l'enveloppe s'écarte sous un certain angle de l'axe du soleil. Il serait au contraire bien plus extraordinaire que l'action de la force d'où résulte la figure de l'enveloppe fût précisément perpendiculaire sur le plan de l'équateur. Ainsi donc, abstraction faite de ce que la supposition que l'action de cette force soit un peu inclinée sur le plan de l'équateur, nous fournit en même temps une explication assez plausible du second phénomène, savoir : de ce que l'équateur, au milieu des parallèles qui en montrent le plus, est lui-même presque entièrement exempt de taches; on est plus fondé à supposer que le grand axe de l'enveloppe s'écarte sous un certain angle LCB de l'axe de rotation, qu'à ad-

mettre ces deux axes comme rentrant l'un dans l'autre.

Ces considérations étaient nécessaires pour écarter tout ce qu'on aurait pu voir d'étrange et de trop recherché dans ma quatrième hypothèse, et pour rendre plus naturelles les explications suivantes, qui s'appuient principalement sur la seconde classe de causes qui facilitent la formation des taches, savoir : les mouvemens ou courans dans l'enveloppe; mais on remarquera que les raisons propres à établir l'existence de ces courans, ne sauraient jouir du même degré d'évidence que celles qui se rapportent à la forme allongée de l'atmosphère enveloppant le noyau du soleil.

7. La droite DE (fig. 1) représente le petit axe de la section plane de l'enveloppe. Cette ligne est donc plus petite que tout autre diamètre de l'ellipse ADBE. Or, les rayons du cercle IKL*l* étant tous égaux entre eux, la ligne D*g* sera la plus petite différence entre les semi-diamètres de l'ellipse et les rayons du cercle. DE est donc le diamètre d'un cercle dont la circonférence est partout à la même hauteur au-dessus du noyau du soleil, et cette hauteur est en même temps plus petite que celle de tous les autres points de la surface de l'enveloppe. Ainsi donc, en vertu de la première classe de causes qui facilitent la formation des taches, le cercle décrit autour de DE comme diamètre, est le plus propre à donner naissance aux taches du soleil. On peut aussi remarquer que ce cercle est la seule section circulaire de l'enveloppe qui passe par le centre C. Toutes les autres sections qui y passent, et l'équateur du soleil lui-même, seront des ellipses.

8. On ne saurait objecter que les observations des taches n'ont aucunement fait reconnaître jusqu'à présent un tel cercle, passant obliquement par l'équateur; et en effet, si ce cercle ne subissait aucune perturbation ni altération, il faudrait que l'enveloppe restât constamment en repos par rapport au noyau du soleil. Lorsque j'écrivais, il y a deux ans, le mémoire sur les taches du soleil (voyez au commencement de ce mémoire), je ne pensais pas, à la vérité,

que les mouvemens dans l'enveloppe fussent aussi grands qu'ils me le paraissent maintenant, par suite de l'hypothèse que le grand axe de l'enveloppe s'écarte de l'axe de rotation du noyau. Je supposais alors (voyez art. 3 du mémoire cité), pour expliquer certains mouvemens des taches, indépendans de la rotation du soleil autour de son axe, que la matière luisante diminuait d'un côté des taches en augmentant de l'autre, et que le mouvement commun aux taches et à la matière luisante environnante était peu considérable en comparaison de cette transformation. Mais à présent, il me paraît plutôt que la cause principale du mouvement particulier de chaque tache consiste dans le mouvement particulier de la matière luisante qui l'environne, et que ces mouvemens particuliers ont beaucoup d'analogie avec le cours des nuages de notre planète.

En conséquence de ces mouvemens particuliers, les taches s'éloignent tantôt de l'équateur, tantôt elles s'en approchent, tantôt elles se meuvent parallèlement à l'équateur, soit dans la direction de la rotation du soleil autour de son axe, soit dans la direction opposée. Ces observations concourent de leur côté à établir l'existence d'un cercle passant obliquement par l'équateur, et vers lequel sont dirigées les taches formées dans une partie quelconque du soleil, en vertu d'un mouvement indépendant de la rotation du soleil autour de son axe.

Des observations continuées, conjointement avec des mesures plus exactes feront peut-être remarquer un jour plus distinctement un tel cercle qui, non-seulement contienne le plus grand nombre de taches; mais vers lequel soient dirigés les mouvemens particuliers des taches formées dans les autres parties du soleil.

9. Une objection plus importante contre la quatrième supposition (art. 5, IV), c'est que, Dn étant menée parallèlement à ik, la hauteur de l'enveloppe en n ou np, serait relativement assez grande, pour qu'on pût présumer que les observations des taches eussent fait remarquer cet endroit comme entiè-

parfaitement sphérique, l'atmosphère qui enveloppe le soleil est de 343 milles géographiques plus haute en B qu'elle ne le serait en D, si le soleil n'avait pas de mouvement rotatoire. Et si le noyau du soleil est un sphéroïde, conformément à la théorie, et comme je l'ai supposé plus haut (art. 5, II), cette différence sera encore augmentée de 5 milles.

14. Quant à l'angle D*Ci* duquel le grand axe du disque du soleil s'écarte de l'axe de rotation (art. 5, IV), je le désignerai par α, et afin de pouvoir établir les calculs, je lui donnerai la valeur arbitraire de 15°. Du reste cette valeur approche probablement de la vérité ; mais ce serait trop hasarder que de l'admettre comme telle, vu que la question dont il s'agit ici est en quelque sorte indéterminée, c'est-à-dire qu'elle renferme plusieurs inconnues, telles que le semi-diamètre du noyau du soleil, ou son rapport à celui de l'enveloppe, la densité de cette dernière, et les autres circonstances physiques qui pourraient la modifier, les mouvemens qui y existent, etc.

15. D'après les suppositions précédentes, et en faisant $\alpha = 15°$, le semi-diamètre C*i* du disque du soleil sera = 960″,4286, et l'angle BCF formé par le grand axe AB de l'ellipse ADBE et par le diamètre F*f* conjugué à *ik* ne diffèrera que de 6′ 2″ de 15°. Par conséquent le diamètre F*f* ne s'écartera que de 6′ à peu près de l'axe du soleil L*l* ; or, la moitié de F*f* ou CF sera = 963″,4,021.

De plus, si l'on mène la ligne C*n* ; l'angle *n*CE sera le double de α, c'est-à-dire = 30°, et l'on trouvera le semi-diamètre C*n* = 961″,055.

16. La différence des semi-diamètres C*n* et CD (ou de la moitié du petit axe) sera donc = 961″,05 — 960″,20 = 0″,85 ; valeur qui représente en même temps la différence de *np* et de D*g*, ou des hauteurs au-dessus de l'enveloppe.

Ainsi donc, en admettant l'angle $\alpha = 15°$, l'enveloppe serait en *n* de 85 milles géographiques plus haute qu'en D.

Vu cette grande différence de la hauteur de l'enveloppe en *n* et en D, la rotation de soleil autour de son axe y

doit produire nécessairement, comme nous l'avons déjà dit, des mouvemens parallèles à l'équateur du soleil, en vertu desquels l'ellipse D*n* approchera plus ou moins de la forme circulaire, et deviendra plus ou moins concentrique au cercle décrit autour de *om* comme diamètre.

17. La différence des semi-diamètres C*i* (ou C*k*) et CD étant = 960″,43 — 960″,20 = 0″,23, il s'ensuit que, si le soleil ne tournait pas autour de son axe, la hauteur de l'enveloppe en *i* et *k* n'excèderait celle qui a lieu en D (partant aussi la hauteur la plus petite de l'enveloppe dans l'équateur) que de 23 milles; tandis qu'elle serait dans ces mêmes points de 85 — 23 ou de 62 milles plus petite qu'en *n*.

Quoique d'après ce qui précède la somme des hauteurs D*g* et *np* soit de 39 milles plus grande que celle des hauteurs *i*I et *k*K, il se pourrait néanmoins qu'à cause de l'extrême légèreté du fluide élastique de l'enveloppe, les mouvemens suivant le parallèle D*n* fussent tellement supérieurs à ceux qui s'exercent suivant l'équateur *ik*, que la formation des taches fût beaucoup plus facile dans le parallèle que dans l'équateur, dont l'ellipse est d'elle-même concentrique au cercle IK du noyau, et ne s'écarte du reste que très-peu de la forme circulaire, quand même le soleil ne tournerait pas autour de son axe.

Toutefois il sera intéressant de considérer de plus près *le rapport des hauteurs moyennes* de l'enveloppe au-dessus du noyau dans le parallèle D*n* et dans l'équateur *ik*.

18. Admettons à cet effet que l'ellipse D*n* ait constamment la même aire en se transformant en un cercle concentrique à *om*; c'est-à-dire que le fluide ne s'échappe de la section parallèle à l'équateur et perpendiculaire sur ADBE ni vers l'équateur ni vers les pôles. Cela posé, les aires des ellipses D*n* et *ik* diminuées, la première, de l'aire du cercle *om*, la seconde, de l'aire du cercle IK, nous donneront les aires de deux surfaces annulaires qui seront entre elles à peu près dans le même rapport que les hauteurs moyennes de l'enveloppe dans le parallèle et dans l'équateur.

En effet, si F et f représentent les aires des surfaces annulaires de l'équateur et du parallèle, H et h les hauteurs respectives de ces surfaces, R et r les rayons des cercles IK et om, nous aurons

$$F = \pi [(R + H)^2 - R^2],$$
$$f = \pi [(r + h)^2 - r^2].$$

Mais si la hauteur de l'enveloppe est très-petite en comparaison du rayon du noyau, on pourra substituer l'angle gCI à l'angle oCI. On aura alors $r = R \cos. \alpha$, et en omettant H^2 et h^2,

$$F : f = 2RH : 2rh,$$

ou

$$H : h = F \cos. \alpha : f.$$

Or, les hauteurs de D et de n au-dessus du noyau ne sont pas Do et mn, mais bien Dg et np. On aura donc avec une grande précision, en désignant par h', la véritable hauteur moyenne du parallèle Dn

$$h : h' = Dg : Dn = 1 : \cos. \alpha;$$

d'où il s'ensuit

$$H : h' = F \cos. \alpha : f \cos. \alpha = F : f.$$

19. Nommons x la perpendiculaire CR″ abaissée de C sur Dn; μ la sécante de l'angle que fait le diamètre Ff avec l'axe du soleil Ll (angle que nous avons trouvé $= 6'2''$ (art. 15) dans la supposition de $\alpha = 15°$). Désignons de plus par r le rayon CI du noyau; par a et b les lignes CB et CD ou les moitiés du grand et du petit axe de l'enveloppe, et enfin par δ et d, les moitiés des diamètres conjugués ik et Ff. Cela fait, nous aurons

l'aire de l'ellipse $ik = \pi l \delta$;

l'aire de l'ellipse $Dn = \pi b\delta - \pi \dfrac{b\delta\mu^2 x^2}{d^2}$;

partant

$$F = \pi b\delta - \pi r^2,$$

$$f = \pi b\delta - \pi r^2 + \pi x^2 - \pi \frac{b\delta\mu^2 x^2}{d^2},$$

et

$$f - F = \pi x^2 - \pi \frac{b\delta\mu^2 x^2}{d^2} = \pi x^2 \left(1 - \frac{b\delta\mu^2}{d^2}\right)$$

$$= \pi b^2 \sin. \alpha^2 \left(1 - \frac{b\delta\mu^2}{d^2}\right);$$

quantité qui sera positive tant que

$$\frac{b\delta\mu^2}{d^2} < 1.$$

C'est ce qui a lieu en effet pour les valeurs de b, δ,... telles que nous les avons supposées plus haut, la quantité μ^2 n'étant pas seulement de 0,00001 plus grande que l'unité. On aura donc $f > F$.

20. On peut remarquer ici que la différence $f - F$ ne dépend pas de la valeur du rayon du noyau (r); et il en devait être ainsi parce que les surfaces annulaires qui proviennent des sections de deux sphères concentriques sont, comme on sait, toutes égales entre elles. Ainsi donc, si le rayon r devient plus petit ou plus grand, on devra augmenter ou diminuer les quantités f et F de deux surfaces annulaires égales entre elles ; la différence $f -$ F restera donc la même.

Mais le rapport $f :$ F, partant aussi le rapport des hauteurs moyennes respectives au-dessus du noyau (art. 18), approchera d'autant plus de l'unité que r devient plus petit. Et si l'on nomme A l'aire de l'ellipse ik, c la différence $f -$ F, on aura généralement

$$f : F = 1 + \frac{c}{A - \pi r^2} : 1.$$

21. La circonstance que la densité du soleil est peu

considérable, en comparaison de celle de la terre, dont elle ne vaut qu'environ le quart, pourrait faire supposer que la différence entre le rayon *r* et les semi-diamètres du disque elliptique du soleil, est réellement plus sensible que nous l'avons supposé tout à l'heure (art. 18). Il est vrai que dans ce cas les hauteurs moyennes de D*n* et de *ik* diffèreraient relativement moins l'une de l'autre; par conséquent les mouvemens plus forts en D*n* y favoriseraient encore la formation des taches, tandis que l'augmentation relativement petite de la hauteur de l'enveloppe ne saurait s'y opposer.

22. Mais il importera peu pour la facilité de la formation des taches que le *rapport* des hauteurs de l'enveloppe soit plus ou moins grand. C'est plutôt la hauteur absolue de l'enveloppe qui doit être assez petite pour que les mouvemens ou courans puissent y produire les lacunes nécessaires pour la formation des taches.

En conséquence, je serais plutôt tenté d'admettre la hauteur D*g* comme très-petite, sinon comme négative. Dans ce dernier cas, le cercle DE du noyau serait entièrement découvert sans la rotation du soleil autour de son axe, et ne serait couvert par la matière luisante qu'en suite des mouvemens dans l'enveloppe.

23. Or que la hauteur de l'enveloppe soit petite ou bien négative, la hauteur moyenne en D*n* sera toujours peu considérable; ce qui explique en même temps un fait constant des observations, savoir que les taches apparaissant à l'un des bords du soleil ou disparaissant à l'autre, on ne remarque jamais aucun enfoncement; circonstance qui devrait cependant avoir lieu si la profondeur des taches était quelque peu proportionnée à leur diamètre.

24. Il y a plus, si la hauteur D*g* est négative, et que l'angle BCL soit en même temps variable, les hauteurs moyennes absolues de l'enveloppe dans l'équateur et dans ses parallèles, augmenteront en même temps que l'angle BCL. Et cette augmentation pourra tellement s'opposer à la formation des taches, qu'on n'en remarquera aucune pendant

un certain espace de temps. (*Lalande* cite, § 3235 de son *Astronomie*, un grand nombre d'années pendant lesquelles on ne pouvait découvrir aucune tache. *Flamsted* n'en voyait pas, entre autres, de décembre 1676, jusqu'en avril 1684).

D'autre part, si l'angle BCL vient à diminuer, le petit axe DE de l'enveloppe coïncidera plus ou moins rigoureusement avec l'équateur du soleil, et il se pourrait qu'une grande partie du soleil autour de l'équateur fût entièrement obscurcie. En effet, sans le mouvement rotatoire du soleil, le cercle DE serait entièrement découvert, et il devra persister dans cet état, bien que la rotation ait réellement lieu, s'il coïncide avec l'équateur du soleil.

Et qui ne se rappelle pas ici le rapport d'*Abulfaradge*, consigné dans l'*Astronomie* de *Lalande* (§ 3232), suivant lequel la moitié du disque du soleil était obscurcie depuis le mois d'octobre 626 jusqu'au mois de juin de l'année suivante? Suivant le même auteur la lumière du soleil était sensiblement diminuée en 525, durant 14 mois.

25. Si l'on veut représenter en nombres les rapports mentionnés art. 18 et suivans, on trouvera, d'après les suppositions précédentes, l'aire de l'ellipse ik = 2897186 secondes carrées, ou = 10000 fois autant de milles carrés; de plus l'aire de la section parallèle Dn sera = 2704400 □″.

Faisons 1° le rayon du noyau ou r $b = 960''$, 20, c'est-à-dire, admettons que la hauteur Dg de l'enveloppe soit nulle avant la rotation du soleil autour de son axe. Les points D et o coïncideront alors, et nous pourrons calculer très-facilement la valeur de f et la différence constante $f - F = c$. En effet, nous trouverons en secondes carrées $F = 688$, et $f = 1930$, donc $c = 1242$. De là $H = o''$, $114 = 11{,}4$ milles, et $h' = o''{,}320 = 32$ milles. Par conséquent, les hauteurs moyennes de l'enveloppe dans l'équateur et dans la section parallèle Dn seront dans le rapport de 11,4 à 32.

2° Si l'on fait $r = 960''{,}00$, c'est-à-dire, de 20 milles plus petit que la moitié du petit axe de l'enveloppe, on trouvera

$F = 1895$, donc $f = F + c = 1895 + 1242 = 3137$; de là $H = 31,4$ milles, et $h' = 52$ milles.

3° Si l'on fait enfin $r = 960'',22$, c'est-à-dire, de 2 milles plus grand que la moitié du petit axe de l'enveloppe (ce qui rendra la hauteur Dg négative), on trouvera $F = 568$, $f = 1810$, de là $H = 9,4$ milles et $h' = 30$ milles.

B. *Démonstration de ce que l'explication précédente des phénomènes relatifs aux taches du soleil est plutôt confirmée que contredite par les mesures des diamètres du soleil faites jusqu'à présent.*

26. Le jugement sur l'exactitude des observations ne pouvant appartenir qu'aux astronomes qui sont eux-mêmes observateurs, je m'abstiendrai de prononcer sur la précision des mesures des diamètres du soleil que nous possédons actuellement, et je ne déciderai pas s'il faut accorder plus de confiance aux mesures des diamètres verticaux, ou à celles des diamètres horizontaux. Mais sans être observateur, on peut concevoir que l'objection que *Delambre* a soulevée contre ces mesures (*Correspondance* de M. *de Zach*, tom. XXII, pag. 194) est dénuée de fondement. *L'épaisseur du fil*, si elle peut ici venir en considération, augmentera en effet les diamètres verticaux, tandis qu'elle ne change rien aux diamètres horizontaux, ce qui provient de la différence des méthodes d'observer les uns et les autres de ces diamètres; mais supposé même que, contrairement à ce qu'a démontré M. *de Lindenau*, cette augmentation erronée suffise pour anéantir la différence observée entre les diamètres verticaux et horizontaux, on aura encore à expliquer le changement périodique de la grandeur des diamètres horizontaux qui dépend de la saison, puisque tous ces diamètres sont mesurés suivant la même méthode.

27. Au reste, ce changement périodique est suffisamment établi par les observations, et c'est de là que M. *de Lindenau* calcule l'excentricité $= \frac{1}{140}$ (*Correspondance* de M. *de Zach*,

tom. XIX, pag. 542), résultat qui diffère considérablement de celui qu'on obtient en comparant les diamètres horizontaux et verticaux, et que M. *de Lindenau* a trouvé $=\frac{1}{279}$ (voyez art. 13).

Ce serait donc augmenter les difficultés que de supposer que les observations nous donnassent les diamètres verticaux trop grands, à cause de l'épaisseur du fil; car alors l'excentricité serait plus petite que $\frac{1}{279}$, et s'éloignerait par conséquent encore plus de la valeur $\frac{1}{140}$, résultant des observations des diamètres horizontaux.

28. Il ne sera pas hors de propos de communiquer ici, d'après M. *de Lindenau* (*Correspondance* de M. *de Zach*, tom. XIX, pag. 534, et tom. XXI, pag. 474), les valeurs des semi-diamètres horizontaux. Le premier des tableaux suivans est le résultat d'observations répétées pendant 26 ans (depuis 1750 jusqu'à 1786); le second est fondé sur des observations répétées pendant 12 ans (depuis 1787 jusqu'à 1798).

MOIS.	1er TABLEAU.	2me TABLEAU.	MOIS.	1er TABLEAU.	2me TABLEAU.
Janvier. . .	960″,17	959″,70	Juillet.	960″,14	959″,52 (*)
Février. . .	961, 16	959, 99	Août	961, 06	959, 98
Mars	961, 52	960, 41	Septembre. . .	961, 70	960, 19
Avril	961, 22	959, 80	Octobre	961, 80	960, 10
Mai	961, 20	959, 81	Novembre. . .	961, 16	960, 07
Juin	960, 00	959, 00	Décembre. . .	960, 43	958, 75

29. En suivant le premier tableau, on voit que les *maximum* des diamètres ont lieu entre les mois de mars et d'avril, et entre les mois de septembre et d'octobre; et les *minimum* entre les mois de juin et de juillet, et entre les mois de décembre et de janvier.

C'est en effet à quoi on devait s'attendre, en déterminant

(*) Au lieu de ce chiffre, on lit 959,22 dans les *Annonces savantes de Goëttingue*.

pour ces époques l'angle formé à midi par l'équateur du soleil et l'horizon. Or, cet angle équivaudra, à l'époque des équinoxes, à l'obliquité de l'écliptique plus un angle de deux degrés et demi à peu près, provenant de la position de l'axe du soleil relativement à l'écliptique. Sa valeur sera donc à peu près de 26°.

Mais à l'époque des solstices, l'arc de l'écliptique qui traverse le disque du soleil sera parallèle à l'horizon, et l'angle dont nous venons de parler ne vaudra que six degrés et demi, valeur qui provient également de la position de l'axe du soleil relativement à l'écliptique.

Ainsi donc, si le soleil est un ellipsoïde dont l'axe de rotation est sensiblement plus grand que le diamètre de l'équateur, il est nécessaire que les diamètres horizontaux observés pendant les équinoxes soient sensiblement plus grands que ceux qu'on observe pendant les solstices, parce que les premiers s'écartent beaucoup plus du petit axe que les derniers.

30. Les résultats contenus dans le second tableau ne se présentent pas, à la vérité, sous une forme aussi régulière, mais ils n'en confirment pas moins le changement périodique de la grandeur des diamètres horizontaux.

31. L'excentricité évaluée suivant les diamètres verticaux comparés aux diamètres horizontaux, diffère trop de celle qu'on obtient en ne considérant que les diamètres horizontaux, pour que nous ne tâchions pas de rechercher la cause de cette grande différence.

D'abord, M. *Bessel* fait observer, relativement à la détermination des diamètres du soleil (*Correspondance* de M. *de Zach*, tom. XX, pag. 83), que c'est à la combinaison des mesures des semi-diamètres verticaux et horizontaux qu'il faut accorder le plus de confiance, parce que, d'après la seconde méthode, la différence ne se présente jamais en entier, et sera d'autant plus affectée des erreurs de l'observation.

Or, quelles que soient les raisons qui ont donné lieu à cette remarque, il est vrai que l'équateur du soleil, étant

incliné sur l'horizon, on ne mesure pas, à proprement parler, le diamètre horizontal respectif, soit TU, mais bien les distances horizontales des bords du soleil V et W ; ce dont on se persuadera aisément si l'on considère que les perpendiculaires élevées sur TU en T et U, ne sont pas tangentes à l'ellipse.

La cause de la différence entre les valeurs de l'excentricité pourrait donc consister dans la méthode de mesurer les diamètres horizontaux. Recherchons en conséquence l'influence de cette erreur sur le résultat des observations.

32. Soit S′ un point quelconque de l'ellipse ADBE (fig. 1.) En soit S′R′ l'ordonnée parallèle à la tangente au point T, et rapportée à CU comme axe des abscisses. Abaissons sur CU la perpendiculaire S′W′, et faisons S′W′ $= t$, CW′ $= s$, angle S′R′W′ $= \lambda$. Nommons aussi δ la moitié du diamètre TU, et d la moitié de son diamètre conjugué, nous aurons :

$$t = \frac{d^2 s \cos.\lambda \pm \sqrt{\left[d^2\delta^2 (\delta^2 - s^2) \sin.\lambda + d^4\delta^2 \cos.^2\lambda\right]}}{\delta^2 + d^2 \cos.\lambda.\cot.\lambda}.$$

La quantité t a deux valeurs différentes, l'une étant S′R′ et l'autre le prolongement de cette ligne compris entre R′ et le second point de rencontre avec l'ellipse. Mais si S′R′ est tangente à l'ellipse, le point S′ coïncidera avec le point V, et nous aurons

$$t = \frac{d^2 s \cos.\lambda}{\delta^2 + d^2 \cos.\lambda.\cot.\lambda},$$

et

$$d^2\delta^2 (\delta^2 - s^2) \sin.\lambda + d^4\delta^2 \cos.^2\lambda = o;$$

donc

$$\delta^2 = s^2 - d^2 \cos.\lambda.\cot.\lambda.$$

La quantité s qui représente le semi-diamètre horizontal donné par l'observation est donc en effet plus grande que le semi-diamètre véritable δ.

Or, d'après les déterminations de M. *de Lindenau* (*Correspondance* de M. *de Zach*, tom. XIX, pag. 541), on a l'angle formé par le diamètre horizontal et par le petit axe $= 26° 2'$, $d = 962'',97$, $b = 960'',20$; avec ces données, on retrouve la valeur de s qui n'y est pas indiquée $= 960'',86$, et de là on tire $\lambda = 89° 52' 50''$, et $\delta = 960'',857$. Par conséquent, la différence entre δ et s est plus petite que $\frac{4}{1000}$ d'une seconde. (La valeur de λ se calcule ici en substituant s au lieu de δ. Si l'on trouvait au moyen de ce λ une différence trop grande entre s et δ, on devrait répéter les mêmes opérations jusqu'à ce qu'on fût parvenu à une approximation suffisante.)

On voit donc que l'erreur qui résulte de ce qu'on ne mesure pas le diamètre horizontal lui-même, mais bien les distances horizontales des bords respectifs du soleil, est trop peu considérable pour expliquer suffisamment la différence entre les valeurs de l'excentricité déterminées suivant les deux méthodes.

33. Cette différence ne s'expliquera pas non plus si, au lieu de considérer le plus petit diamètre horizontal comme le petit axe de l'ellipsoïde, on l'admet avec plus de précision, comme faisant avec le petit axe un angle de 6 degrés et demi (voyez art. 29).

Car, en égalant à $960'',20$ le semi-diamètre qui fait avec le petit axe un angle de 6 degrés et demi, et à $962'',97$ celui qui fait avec le grand axe un angle de $26° 2'$, on trouvera la moitié du petit axe $= 960'',155$, et la moitié du grand axe $= 963'',645$, et delà l'excentricité $= \frac{1}{247,4}$.

34. On devrait peut-être attribuer une valeur plus petite que $962'',97$ au semi-diamètre qui fait avec le grand axe un angle de $26° 2'$, parce que les semi-diamètres verticaux, dont il représente la moyenne ne font pas, à toutes les époques de l'année, le même angle avec le grand axe; mais en diminuant la valeur de ce semi-diamètre sans rien changer à l'angle dont il s'écarte du grand axe, on tomberait sur une valeur plus petite du petit axe; l'excentricité serait donc di-

minuée en même temps, et différerait encore plus de celle qu'on obtient par la seconde méthode d'observer.

35. Mais quelle est enfin la cause de cette différence considérable entre les valeurs de l'excentricité déterminées suivant des méthodes différentes? Cette question importante se trouvera peut-être éclaircie par ce qui va suivre.

36. En effet, on pourra aplanir entièrement cette difficulté, si l'on suppose que l'axe de l'enveloppe s'écarte sous un certain angle de l'axe du noyau (art. 6, IV).

Supposons donc, comme plus haut (art. 14), que l'angle DC*i* (fig. 1), soit = 15°; soit aussi TU le plus grand diamètre horizontal, on aura l'angle UCE formé par ce diamètre et le petit axe = 26° 2′ + 15° = 41° 2′. Or, d'après M. *de Lindenau* (mém. cité, pag. 542), on a CU = 961°,55. Ainsi donc, si l'on fait la moitié du petit axe = 960″,155 (art. 33), on trouvera la moitié du grand axe = 963″,401; et l'excentricité évaluée suivant la seconde méthode d'observer deviendra $= \frac{1}{296,7}$, valeur qui approche d'une manière presque surprenante de l'excentricité évaluée d'après la première méthode.

37. Concevons maintenant de l'autre côté du petit axe un diamètre RQ qui fasse avec cet axe le même angle que TU (26° 2′). Il est facile de voir qu'en vertu du mouvement rotatoire du soleil, le diamètre TU diminuera de grandeur, tandis que RQ deviendra plus grand.

Or, ces deux diamètres ne seront jamais parfaitement égaux entre eux. Cependant, la rotation du soleil autour de son axe pourrait en rendre la différence si petite, qu'il fût impossible de la découvrir au moyen des observations.

38. Cette différence est réellement indiquée dans le premier tableau tiré des observations répétées pendant 26 ans, ce que toutefois on pourrait attribuer aux erreurs inévitables de l'observation. Du reste, on trouve la valeur moyenne du *maximum* pendant les mois de mars et d'avril = 961″,37, et pendant les mois de septembre et d'octobre = 961″,75. La différence en est donc = 0″,38. Or, la valeur moyenne

du *minimum* pendant les mois de juin et de juillet est = 960″,07, et pendant les mois de décembre et de janvier = 960″,30; donc leur différence = 0″,23.

D'après cela, TU représenterait le diamètre horizontal observé pendant les mois de septembre et d'octobre, et RQ le diamètre horizontal observé pendant les mois de mars et d'avril. De plus, ce serait environ entre les mois d'octobre et de décembre que le plan BCL qui contient l'axe du soleil et le grand axe de l'enveloppe se présenterait perpendiculairement à l'œil de l'observateur, puisque le *minimum* pendant les mois de décembre et de janvier est également plus grand que pendant les mois de juin et de juillet.

Si, d'ailleurs, les observations n'indiquaient, pendant un espace de temps considérable, aucune différence entre TU et RQ, on devrait d'abord en attribuer la cause à la petitesse de cette différence et aux erreurs inévitables de l'observation, mais peut-être aussi à la circonstance que la position de l'enveloppe est variable relativement au noyau du soleil.

39. Résumons en dernier lieu les résultats auxquels nous ont conduits les considérations précédentes.

1° Il est de fait que le soleil se présente à l'observateur sous la forme d'un corps dont l'axe de rotation est plus grand que le diamètre de l'équateur.

2° Quiconque a observé à différentes reprises et au moyen d'un bon instrument la lumière et les taches du soleil, ne concevra que difficilement des taches différentes de celles dont il a été question dans ce mémoire. L'état de mobilité dans la surface du soleil, contraire à l'état de stabilité dans la surface de la lune, saute, pour ainsi dire, aux yeux. Qu'y a-t-il d'après cela de plus simple que de supposer un fluide subtil et élastique enveloppant le soleil, à travers lequel on voit quelquefois jusqu'au noyau? Qu'y a-t-il de plus simple que de supposer que cette circonstance se présente le plus facilement là où la hauteur de l'enveloppe est la plus petite? Or, il sera toujours permis d'attribuer au noyau du soleil

la figure qui lui convient d'après la théorie des corps célestes assujettis à tourner autour d'un axe. Cette théorie n'est incompatible qu'avec la figure de l'enveloppe, telle que les mesures des diamètres nous forcent de l'admettre ; et c'est précisément l'hétérogénéité des figures de l'enveloppe et du noyau qui explique pourquoi on n'aperçoit plus de taches au delà d'une certaine distance de l'équateur.

3° Quant à la position du noyau relativement à l'enveloppe, elle est en quelque sorte indiquée par les valeurs des diamètres horizontaux mesurés à différentes époques de l'année, car les résultats de ces mesures sont loin de s'accorder avec la supposition d'une figure parfaitement elliptique de l'enveloppe (voyez les observations dans les *Annonces savantes de Goëttingue*, 1809, n° 113, 17 juillet). Et de plus, en admettant cette position telle que la représente la figure, on explique entièrement la circonstance singulière que l'équateur ne montre que très-peu de taches en comparaison des parallèles qui l'environnent.

Au demeurant, il reste à faire des mesures plus exactes afin de déterminer avec plus de précision la figure de l'enveloppe. Qu'on me permette enfin de soumettre la question suivante aux astronomes plus versés que moi dans l'art d'observer : Ne serait-il pas possible d'achever ces mesures en bien peu de temps, en observant les diamètres horizontaux et verticaux, non-seulement à midi, mais aussi aux autres heures du jour? Sous cinquante degrés de latitude, l'axe du soleil décrit, pendant le solstice d'été, depuis 7 heures du matin jusqu'à 5 heures du soir, un angle de plus de 88 degrés. Les mesures des diamètres horizontaux non moins que celles des diamètres verticaux s'étendraient alors, pendant ces dix heures, sur un espace de 2×88 ou de 176 degrés; et par conséquent ces mesures réunies embrasseraient presque toute la surface du soleil, telle qu'elle se présente le même jour.

Lettre de M. le docteur Reiss au rédacteur, *sur quelques problèmes insérés dans la Correspondance Mathématique.*

Monsieur,

Veuillez vous rappeler une question de géométrie que vous avez proposée à la pag. 204 du tom. IV de votre estimable journal, et dont voici le contenu :

Étant donnée une courbe fermée, déterminer : 1° un point tel que la somme de ses distances à tous les points de cette courbe soit un minimum; 2° un point tel que la somme de ses distances à tous les points de la courbe soit un maximum. On exige que ce dernier point soit dans l'intérieur de la courbe.

La solution que j'ai donnée de cette question (*pag.* 45 *de ce volume*), a eu pour suite une note de M. *Pagani* (*ib. pag.* 210), dans laquelle ce savant analyste communique une autre solution du même problème, qu'il dit être *une simplification considérable de la formule fondamentale ;* et de plus un mémoire de M. *Steichen* (*ib. pag.* 302), où se trouvent résolues deux questions que j'avais proposées à la fin de l'article cité.

Quant à la note de M. *Pagani*, une simple comparaison vous montrerait que ce n'est pas, à proprement parler, la formule fondamentale qui a été simplifiée, puisque M. *Pagani* parvient absolument au même résultat que moi. Ce n'est que dans les raisonnemens analytiques qu'il y a simplification ; et je dois à la vérité de dire que la solution m'en paraît être devenue moins élémentaire, et ce qui est beaucoup plus important, moins complète.

Je crois pouvoir justifier cette double assertion par l'emploi que l'auteur de la note a fait de l'infiniment petit. En effet, M. *Pagani* admet, comme axiome, ou comme chose prouvée, que la courbe auxiliaire divisée par n (n étant $= \infty$) équivaut

à la différentielle de cette courbe, et que la somme de tous les rayons vecteurs, multipliés chacun par cette différentielle, revient à l'intégrale du rayon vecteur indéfini multiplié par la même différentielle. Or, un tel emploi de l'infiniment petit ne saurait être légitimé que par des développemens étendus et profonds, et il importait d'autant plus de constater les propositions que je viens de rapporter, qu'elles ne sont valables que si la condition la plus essentielle de notre question est remplie; je veux dire si les rayons vecteurs passent véritablement par les points de division de la courbe auxiliaire. Je ne doute pas que l'esprit éclairé de M. *Pagani* n'ait reconnu cette vérité; mais en omettant de la signaler, il nous a ôté tous les moyens de reconnaître si la formule fondamentale dépend véritablement et nécessairement de la condition sans laquelle elle serait tout-à-fait inadmissible. S'il pouvait rester quelque doute sur la vérité des remarques précédentes, le calcul suivant suffira pour le dissiper entièrement.

En nommant S la courbe auxiliaire, $\Sigma\rho$ la somme de tous les rayons vecteurs, et n le nombre de ces derniers (qui est ici infiniment grand), l'auteur de la note pose l'équation identique que voici :

$$\Sigma\rho = \frac{n}{S}\,\Sigma\rho\,\frac{S}{n};$$

puis il fait

$$\frac{S}{n} = ds\,;\; \Sigma\rho\,\frac{S}{n} = \Sigma\rho\, ds = \int\rho\, ds\,;$$

d'où il conclut immédiatement

$$\frac{\Sigma\rho}{n} = \frac{\int\rho\, ds.}{S}$$

Mais si l'on ne change rien aux valeurs particulières des rayons vecteurs ni à leur nombre, la somme $\Sigma\rho$ ne subira aucun changement. Qu'on remplace maintenant la quantité S par une

autre quelconque, soit S′, on aura cette autre équation identique :

$$\Sigma\rho=\frac{n}{S'}\Sigma\rho\frac{S'}{n};$$

or, si l'on fait avec M. *Pagani*,

$$\frac{S'}{n}=ds'\,;\ \Sigma\rho\, ds'=\int\rho\, ds'\,,$$

on trouvera

$$\frac{\Sigma\rho}{n}=\frac{\int\rho ds}{S}=\frac{\int\rho ds'}{S'}\,;$$

c'est-à-dire que la nature de la courbe auxiliaire ne change pas la valeur de la moyenne arithmétique des rayons vecteurs ; ce qui est évidemment faux.

Je passe maintenant au mémoire de M. *Steichen*, dans lequel l'auteur a bien voulu s'occuper des questions que j'avais proposées à la fin de mon article. Je ne puis m'empêcher de faire remarquer que j'y avais le seul but d'ouvrir à mes lecteurs un nouveau champ d'applications à des courbes connues. Aussi ai-je lu avec plaisir les exemples que M. *Steichen* a développés dans son mémoire ; mais quant à la solution générale de ces questions, elle était superflue, puisqu'elle se trouvait comprise, à quelques signes près, dans la solution de la première question. C'est ce dont M. *Steichen* aurait pu facilement se persuader, en comparant les formules qu'il avait trouvées soit entre elles, soit avec la formule fondamentale de notre question. Voici du reste l'énoncé le plus général de ce genre de questions :

Soit $y=\varphi x$; qu'on substitue successivement dans cette fonction toutes les valeurs de x comprises entre des limites données. On demande la moyenne arithmétique de toutes les valeurs de y qui en proviennent, dans la supposition que le nombre de x (partant aussi celui des y) renfermés entre des limites quelconques, soit dans un rapport constant avec l'étendue de x entre les mêmes limites ; c'est-à-dire avec la différence de ces limites.

Par rapport à nos trois questions, la quantité x représente la courbe auxiliaire qu'on avait divisée en une infinité de parties égales. La quantité y représente en même temps ou les rayons vecteurs menés d'un point fixe aux points de la courbe principale, ou les angles que font les tangentes à cette courbe avec une ligne fixe, ou enfin les angles formés par ces tangentes et les rayons vecteurs menés des points de contact à un point fixe. Vous verrez aussi sans peine pourquoi la courbe principale n'est pas indiquée dans l'énoncé précédent. En effet, supposons que les courbes principale et auxiliaire soient données par des équations entre leurs coordonnées rectangulaires, rapportées aux mêmes axes; on pourra toujours exprimer l'abscisse de l'auxiliaire en fonction de l'arc respectif de cette courbe. Or, la fonction soit linéaire, soit angulaire ou autre des valeurs de laquelle on cherche la moyenne arithmétique, pourra être exprimée en fonction de l'abscisse de la courbe principale; puis en fonction de l'abscisse de la courbe auxiliaire, et enfin en fonction de l'arc de cette dernière. L'équation de la courbe principale n'est donc nécessaire que pour établir la relation entre y et x, et pour déterminer les limites de cette dernière quantité.

Il est facile de voir que la solution de la question que vous avez proposée peut s'appliquer, en y changeant la signification de quelques lettres, à la question plus générale et tout analytique que je viens d'énoncer. Mais puisque des mathématiciens reconnus n'ont pas été satisfaits de ma première solution (*) (ce que je crois provenir plutôt de l'enchaînement des idées que du manque d'évidence), j'ai jugé convenable d'en chercher une autre qui fût à la fois évidente, facile à saisir, et dégagée des notions de l'infiniment petit. Je vous demanderai donc la permission de vous exposer ici le résultat de mon travail.

(*) M. *Steichen* dit qu'en demandant à M. *Pagani* des éclaircissemens sur mon article, ce dernier lui avait montré la *véritable* méthode pour résou-

Soit Y la moyenne arithmétique de tous les y compris entre la valeur initiale de x et la valeur $x=x$; changeons x en $x+\Delta x$; les quantités y et Y seront augmentées de Δy et de ΔY. Or, en nommant N (Y) le nombre des y contenus entre la valeur initiale de x et la valeur $x=x$, et N (ΔY) le nombre des y contenus entre $x=x$ et $x=x+\Delta x$, nous aurons par la nature de la question

$$Y+\Delta Y=\frac{N(Y).\,Y+N(\Delta Y).\,\Delta Y}{N(Y)+N(\Delta Y)};$$

de plus l'énoncé de la question nous fournit

$$N(Y)+N(\Delta Y):x+\Delta x=N(Y):x=N(\Delta Y):\Delta x;$$

nous obtiendrons donc

$$Y+\Delta Y=\frac{xY+\Delta x\,\Delta Y}{x+\Delta x},$$

ou bien

$$(x+\Delta x)(Y+\Delta Y)=xY+\Delta x\,\Delta Y.$$

Or, il est reconnu que

$$(x+\Delta x)(Y+\Delta Y)-xY=\Delta(xY);$$

---

dre ce genre de questions. Je doute que d'après ce que j'ai dit plus haut, on puisse appeler la méthode de M. *Pagani* aussi exclusivement la véritable. Du reste les suppositions géométriques de M. *Pagani* ne reviennent-elles pas toutes aux miennes? N'admet-il pas qu'il s'agit dans notre question de chercher la moyenne arithmétique de tous les rayons vecteurs? n'admet-il pas une courbe auxiliaire qu'on doit diviser en une infinité de parties égales, et par les points de division de laquelle on doit faire passer les rayons vecteurs? ne parvient-il pas enfin au même résultat que moi?

nous aurons donc

$$\Delta(xY) = \Delta x \, \Delta Y.$$

Maintenant si les valeurs des y entre $x = x$ et $x = x + \Delta x$ étaient toutes égales à y, on aurait $\Delta Y = y$; et si toutes ces valeurs étaient égales à $y + \Delta y$, on aurait $\Delta Y = y + \Delta y$. La véritable valeur de ΔY tombera par conséquent entre y et $y + \Delta y$, et sera de la forme $y + a\,\Delta y + \ldots$. (De semblables raisonnemens sont si familiers aux lecteurs des ouvrages didactiques de *Lagrange*, que je crois superflu d'y insister). Mais ΔY étant $= \Delta\varphi x = \alpha\,\Delta x + \ldots$; nous aurons

$$\Delta y = y + A\Delta x + \ldots,$$

$$\text{et } \Delta(xY) = \Delta x \, \Delta Y = y\Delta x + A\,\Delta x^2 + \ldots,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$d(xY) = y\,dx,$$

ou bien

$$Y = \frac{\int y dx}{x};$$

équation qui résout la question proposée si l'on y prend l'intégrale entre les limites données de x, et qu'on assigne à x du dénominateur la valeur qui lui convient entre ces mêmes limites.

Il me reste encore à faire quelques remarques sur la question par laquelle M. *Steichen* a terminé son mémoire. Il s'agit ici de trouver la courbe pour laquelle la fonction

$$\frac{\int \varphi ds}{S}$$

devient un minimum, ds étant l'élément de la courbe, S l'arc de cette courbe prise entre les mêmes limites que l'intégrale, et φ l'angle que fait la tangente avec le rayon vecteur mené du point de contact à un point fixe.

M. *Steichen* a très-bien reconnu que cette question était du ressort du calcul des variations ; mais néanmoins sa solution me paraît être essentiellement erronée. En effet, M. *Steichen* trouve que la nature de la courbe cherchée est exprimée *indépendamment de toute restriction* par l'équation $\varphi =$ const. C'est comme on sait la propriété des spirales logarithmiques. (C'est aussi celle du cercle, si $\varphi = 90°$; et de la ligne droite, si $\varphi = o$, ou $\varphi = 180°$).

Admettons, maintenant que les valeurs de φ soient données aux limites, et différentes l'une de l'autre; dans ce cas, il est impossible qu'une logarithmique satisfasse à la question. Admettons encore que les rayons vecteurs menés du point fixe aux extrémités de la courbe, soient supposés être égaux entre eux. Dans ce cas la logarithmique dégénèrera en un arc de cercle, dont le centre coïncidera avec le point fixe, et nous aurons

$$\frac{\int\varphi ds}{S} = 90°$$

que l'on prenne les tangentes suivant l'une ou l'autre de leurs directions. Or, on peut mener entre les extrémités de cet arc de cercle une infinité d'arcs courbes dont les tangentes, prises suivant l'une de leurs directions, fassent avec les rayons vecteurs menés des points de contact au centre de l'arc de cercle, des angles moindres que 90°. La moyenne arithmétique de ces angles, représentée par $\frac{\int\varphi ds}{S}$ sera donc plus petite que 90°; par conséquent l'arc de cercle ne répondra pas à la question.

L'erreur que je viens de signaler provient principalement de ce que M. *Steichen* n'a pas fait entrer dans la solution la dépendance préexistante entre l'angle φ et l'arc s; en conséquence de quoi il a admis $d\varphi$ et $\delta\varphi$ comme n'ayant pas besoin de développemens ultérieurs. Il me semble aussi que les différentes manières dont les limites pourraient être déterminées, doivent influer considérablement sur la marche de la solution; de sorte qu'en certains cas il ne puisse s'agir que d'un *minimum relatif*.

Je termine enfin cette lettre dont la rédaction m'a été pénible en plusieurs endroits ; mais jugeant de mon devoir de rendre publiques les explications qu'elle contient, je n'hésite pas à vous prier de lui accorder une place dans la *Correspondance*.

J'ai l'honneur d'être, etc.

Francfort, ce 5 novembre 1830.

Problème général de la trisection et multisection des angles et arcs de cercles, communiqué par M. Roche, Professeur de mathématiques, de physique et de chimie à l'École d'Artillerie de la marine à Toulon.

Dans le troisième numéro de la *Revue maritime*, un savant allemand (1) prétend que la trisection de l'angle est possible. Un savant français répond qu'elle est non-seulement possible, mais que le problème général de la division des angles et arcs de cercle l'est également. Ces deux géomètres ont-ils raison? Non, s'il s'agit d'une solution géométrique en n'employant que la règle et le compas ; oui, s'il s'agit d'une solution approximative : il faudrait donc en conclure que l'un et l'autre ont rêvé une chimère. Pas tout-à-fait cependant, et je crois que la solution du problème est possible, par un moyen approximatif et géométrique tout à la fois, mais par une approximation certaine, et dont la limite sera si l'on veut la largeur ou la longueur de l'empreinte de la plus fine pointe de compas sur le papier ou le plan quelconque sur lequel on voudra opérer. On ne peut construire géométriquement que les équations ou les radicaux du second degré ; arithmétiquement un radical du se-

---

(1) M. *Heinrich Hausman Seitzergasse*, n° 43, à Vienne. Une notification à ce sujet, signée par M. *Herman Wermertkind*, major de l'armée impériale, et insérée dans le n° 2 de l'*OEster-mil-Zeitschrift*, a été rapportée dans le journal anglais, *Journal of the united....* n° 17, mai 1830, pag. 622.

cond degré est tout aussi impossible à assigner exactement ou en nombres finis, qu'un radical d'un degré quelconque, ou que le rapport de la circonférence au diamètre. Il en est de même de l'évaluation en décimales d'une fraction arithmétique, dont le dénominateur a d'autres facteurs premiers que les nombres 2 et 5.

D'après ce préambule, voici comment je résous le problème général de la division d'un arc de cercle.

Solution. — On sait diviser géométriquement un arc de cercle, soit 1° avec la règle et le compas par l'intersection de deux arcs égaux tracés de leurs extrémités et celle de la droite qui joint les deux points d'intersection avec le cercle; ou 2° avec la règle seule par une parallèle menée par le centre du cercle au côté du rectangle inscrit, dont les diagonales sont les diamètres passant par l'extrémité de l'arc; ou 3° approximativement, avec le compas seul, par deux arcs égaux qui se rencontrent sur le milieu de l'arc donné. Il s'ensuit donc que pour diviser un arc en plusieurs parties égales, il s'agit d'évaluer la fraction de l'arc que l'on veut avoir en divisions de cet arc de deux en deux, ou suivant les puissances de deux. En un mot, c'est évaluer cette fraction en une période binaire, dans le système de l'arithmétique binaire. Quelques exemples éclairciront cette théorie.

I.

Trisection de l'angle. — La fraction $\frac{1}{3}$ réduite en demis, quarts, huitièmes, etc., donnera

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \text{etc},$$

ou dans la notation de l'arithmétique binaire $\frac{1}{3}=0,010101$, etc., car 1 placé au second rang, exprime $\frac{1}{4^1}$, 1 au quatrième $\frac{1}{4^2}$

et ainsi de suite. D'après cette formule ou la période 0,01, ou la progression géométrique décroissante dont le premier terme est $\frac{1}{4}$ et la raison 4., je prends la moitié de l'arc, puis le quart, qui me donne le premier terme de ma série, je divise le quart contigu de la même manière pour en obtenir le quart qui représente $\frac{1}{4^2}$ et ainsi de suite jusqu'à ce que la petitesse des divisions me force à m'arrêter, ce qui arrive bientôt, et j'obtiens aussi exactement que possible le tiers de l'arc donné.

II.

Division de l'angle en cinq parties égales. — La fraction $\frac{1}{5}$ évaluée en fractions sousmultiple de 2, me donne

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8}$$

ou, dans l'arithmétique binaire, $\frac{1}{5} = 0{,}001100110011$, dont la période est évidemment 0,0011 ou $\frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ ou $\frac{3}{16}$ premier terme de la progression

$$\frac{1}{5} = \frac{3}{16} + \frac{3}{16^2} + \frac{3}{16^3} + \text{etc.}$$

ce que l'on eût obtenu également par l'alternative des quotiens positifs et négatifs, car

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{1}{216} + \text{etc.},$$

et en réduisant de deux en deux

$$\frac{1}{5} = \frac{3}{16} + \frac{3}{16^2} + \text{etc.}$$

comme ci-dessus. On prendra donc le quart de l'arc donné,

on en retranchera sur ce même quart le quart du quart ou le seizième ; le reste sera l'arc $\frac{3}{16}$, on y ajoutera son seizième, puis le seizième de ce seizième, et ainsi de suite jusqu'à la limite que l'on trouvera bientôt, et l'on aura le cinquième de l'arc.

Observation. — On opèrera de même sur tous les nombres donnés. Quant à ceux qui ne diffèrent que d'une unité en plus d'un multiple de 2, on obtiendra de suite la période par les quotiens alternatifs, ainsi

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} - \frac{1}{8^4} + \text{etc.} = \frac{7}{8^2} + \frac{7}{8^4} + \text{etc.}$$

ou $\frac{1}{9} = 0,000111000111$ etc. dans le système binaire. Quant aux nombres qui ne sont pas premiers, comme 9 et 15, on peut évaluer $\frac{1}{9}$ en prenant le $\frac{1}{3}$ du $\frac{1}{3}$, et $\frac{1}{15}$ en prenant le $\frac{1}{3}$ du $\frac{1}{5}$.

Si l'on veut appliquer avec succès cette méthode dans la pratique, on fera bien de porter les divisions de chaque extrémité de l'arc, et de chercher une rencontre exacte au milieu ; et si c'est un cercle, du même point de chaque côté ou même des deux extrémités du diamètre, en dessus et en dessous, en prenant pour commencer une demi-division, si la division est impaire (*).

Construction des cinq polyèdres réguliers (**).

Si l'on désigne par r le rayon de la sphère inscrite du polyèdre, par t l'apotème du polygone régulier, qui constitue

---

(*) On peut voir une autre solution du même problème par M. le prince de *Saxe-Weimar*, à la page 349, tom. IV de la *Correspondance Mathématique*.

(**) Nous devons cette notice à M. le professeur *Horner* de *Zurich*, connu depuis long-temps par des recherches astronomiques et par son voyage autour du monde avec le célèbre *Krusenstern*.

une des faces du polyèdre; par s l'aire de ce polygone, et par ρ le rayon de son cercle circonscrit, on a les rapports suivans entre le rayon de la sphère inscrite et l'apotème du polygone correspondant :

Dans le tétraèdre $t = r.\sqrt{2}$

— l'octaèdre $t = r.\frac{1}{2}\sqrt{2}$

— l'exaèdre $t = r.$

— le dodécaèdre $t = r.\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

— l'icosaèdre $t = \frac{r.3-\sqrt{5}}{2}$

l'expression $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ dénote la division du rayon r en moyenne et extrême raison; $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ le reste de cette division.

De ces valeurs de t, on passe facilement aux expressions du rayon ρ qui sera

Pour la face du tétraèdre $= 2\sqrt{2}.r$

— — — le l'octaèdre $= \sqrt{2}.r$

— — — de l'exaèdre $= r$

— — — du dodécaèdre $= (3-\sqrt{5})r$

— — — de l'icosaèdre $= (3-\sqrt{5})r$

Pour démontrer ces assertions, on fera usage d'une projection orthogonale, dont le plan passe par le centre de chaque polyèdre, et sur laquelle toutes les lignes parallèles à ce plan se projettent dans leur grandeur naturelle. On aura soin de placer le polyèdre de manière que non-seulement une ou plusieurs de ces arêtes, mais aussi les angles plans et les angles plano-linéaires se présentent sans raccourcissement, ce qui sera toujours possible.

Projection du tétraèdre, figure II.

L'arête AB se trouvant dans le plan de la section, les lignes AC et BC sont les lignes perpendiculaires à l'arête opposée qui passe par C.

Dans les triangles équilatères dont cette dernière arête est un côté commun, l'apotème CF ou CD est la moitié de BF ou AD, rayons des cercles circonscrits; le rayon BI de la sphère circonscrite au tétraèdre se trouve par la proportion

$$CD : CB = FI : BI, \text{ ou}$$
$$CD : 3CD = FI : BI; \text{ donc } BI = 3FI.$$

De même on a
$$BF : FI = BD : CD, \text{ ou}$$
$$2CD : FI = FI : CD, \text{ donc } 2CD^2 = 4FI^2;$$

donc l'apotème $CD = \sqrt{2}.\,FI$. Les propriétés connues du triangle équilatère donnent ensuite le rayon ρ du cercle circonscrit $= 2t$; et le côté $AB = 2\sqrt{3}.t$ ou $2\sqrt{2}.\sqrt{3}.r$. L'aire s du triangle devient $6\sqrt{3}.r^2$ ou $\frac{3}{4}\sqrt{3}.\rho^2$. La surface du tétraèdre $= 24\sqrt{3}.r^2$ et son volume $= 8\sqrt{3}.r^3$.

Construction graphique. — Ayant tiré les perpendiculaires AC et BD, on fait $BD = 4r$; ensuite on mène la tangente BC au cercle I, et en portant sa longueur sur CA, on a le côté AB du triangle équilatère.

L'Octaèdre, figure III.

Dans cette projection, AB représente une arête parallèle au plan de la section; CA et CB, DA et DB sont des perpendiculaires, qui coupent les quatre faces latérales de l'octaèdre. Le triangle BIC étant rectangle en I, et le rayon intérieur IF perpendiculaire à la face BC, on a

$$FI^2 = CF \times BF = 2BF \times BF = 2BF^2$$

donc
$$BF \text{ ou } t = \frac{FI}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.r \text{ et } \rho = \sqrt{2}.r.$$

On a de même

$$BF : BI = BI : BC; \quad \text{ou} \quad BI^2 = BF \times 3BF,$$

ce qui donne le côté

$$AB = 2\sqrt{3}.t = \sqrt{2}.\sqrt{3}.r$$

Ensuite $\quad BF : BI = IF : CI = 1 : \sqrt{3}$

L'aire s du triangle sera

$$\frac{3}{2}\sqrt{3}.r^2 = \frac{3}{4}\sqrt{3}.\rho^2.$$

La surface de l'octaèdre est

$$= 12\sqrt{3}.r^2 \text{ et son volume } = \frac{6r^3 \times 2.\sqrt{3}.r}{3} = 4\sqrt{3}.r^3$$

CI étant au rayon IF comme $\sqrt{3} : 1$, on aura le rayon CI du globe extérieur en construisant avec le diamètre intérieur ab le triangle équilatère abC, ce qui donne un moyen commode pour l'exécution graphique de la projection.

L'Exaèdre, figure IV.

Le plan de cette projection passe par la diagonale AC et BD des deux bases du cube, de manière que les arêtes AB et CD se trouvent dans ce plan même; EF restant au-devant de la section. Ici l'apotème t et le rayon de la sphère r sont identiques. Le côté AB est égal à $2r$; EA $= \frac{1}{2}$ diagonale du carré constituant $= r\sqrt{2}$; le rayon extérieur IA $= r\sqrt{3}$. La surface s du carré $= 4r^2$, le volume de l'exaèdre $= 8r^3$.

Le Dodécaèdre, figure V.

Construction. — Ayant divisé le rayon IF de la sphère intérieure en moyenne et extrême raison, on construit le triangle rectangle IFE dont le rayon donné IF et sa division forment

les cathètes ; la ligne IE donnera alors la distance des arêtes au centre de la sphère. Prolongeant EI jusqu'à G, et menant DIC à angle droit, on aura par l'uniformité du polyèdre les distances IE, IC, ID, IG égales entre elles. On mène HK, LM parallèles à EG jusqu'à l'intersection avec les tangentes menées des points E et G; ce seront deux arêtes du dodécaèdre, ou côtés du pentagone. Divisant ensuite IE, IC, IG, ID en moyenne et extrême raison, on obtient les lignes IR, IS, IT, IU, lesquelles portées en N,O,P,Q forment un carré composé des diagonales des quatre pentagones concourans à l'arête AB. En menant de E sur P et Q, et de G sur N et O les intersections avec la ligne DC, on a les arêtes AB, AN, AP, BO, BQ. Dans cette construction les points E et G représentent deux arêtes ; les lignes EK, EM, GH, GL sont les perpendiculaires des quatre pentagones, coupées par le plan de la section. Les angles MEK et HGL sont deux angles plans du dodécaèdre; IK est le rayon de la sphère circonscrite.

Démonstration. Le côté du pentagone étant en proportion continue à la diagonale, et RE étant (comme reste de la division de IE) en proportion continue à la demi-diagonale IR, il s'ensuit l'égalité des lignes RE et CK. Ces lignes étant parallèles, on a aussi RC parallèle à EK. Donc le triangle rectangle IFE sera semblable au triangle IXR ou CIR ; mais à cause de IR = IS, les cathètes du triangle CIR seront l'un à l'autre en proportion continue; il en sera de même des cathètes du triangle IFE; donc l'apothème FE du pentagone est la division du rayon intérieur en moyenne et extrême raison, et l'on aura, d'après les significations adoptées ci-dessus

$$t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} . r.$$

Mais dans le pentagone le rayon IF (*fig.* VII) ou ρ du cercle circonscrit est la moyenne proportionnelle entre l'apotème IM et la sécante IG, égale à deux fois le côté du décagone; il en résulte $\rho = 3 - \sqrt{5}.r.$

Le côté AB devient égal à

$$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\times\rho = r.\sqrt{50-22\sqrt{5}}$$

Le volume du dodécaèdre $= 10\sqrt{130-58\sqrt{5}}.r^3$. L'aire du pentagone

$$=\frac{5}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\times\rho^2 \quad \text{ou} \quad \frac{5}{2}\sqrt{130-58\sqrt{5}}\times r^2$$

Le rayon de la sphère circonscrite $= r\sqrt{18-6\sqrt{5}}$.

L'Icosaèdre, figure VI.

Construction. — Ayant divisé le rayon IF en moyenne et extrême raison, on prend le reste de cette division, et en le portant de F en E, l'on construit le triangle rectangle IFE ; prolongeant EF, on fait CF = 2EF, et menant la tangente EH, on la fait égale à EC. Prolongeant de même IE, et faisant IK = IE, on répète cette construction, en menant les tangentes KG et KD égales à EC ; ensuite on tire GC, DH, GE, KH, CK, DE, et on réunit les deux points d'intersection A et B par la droite AB.

Dans cette projection la ligne AB étant parallèle au plan du dessin, sera une arête du polyèdre, ou le côté du triangle équilatère correspondant ; CF sera le rayon du cercle circonscrit à ce triangle, FE l'apotème et CE la perpendiculaire. GC et DH sont deux arêtes qui passent par le plan de la section ; EK, CH, GD, désignent la distance mutuelle des arêtes du polyèdre et sont égales à la diagonale du pentagone formé par la réunion de cinq triangles autour d'un même point. GE, DE ; CK, HK sont les perpendiculaires de ce pentagone ; GM est le rayon de son cercle circonscrit.

Démonstration. CH étant la diagonale d'un pentagone formé par les cinq triangles réunis autour du point E, et l'arête DH étant son côté, ces deux lignes qui forment le triangle rec-

tangle CHD, placé dans un demi-cercle, sont entre elles en proportion continue. Il en est de même des cathètes du triangle semblable CLI. IL est donc la division en moyenne et extrême raison du côté CL, et ce dernier étant égal à IE, comme demi-distance des arêtes, IL sera la division mentionnée de IE, et LE sera le reste de cette division. Le petit cathète LE du triangle rectangle CLE est donc le reste de la division du plus grand CL, et le triangle rectangle FE ayant l'angle E commun avec CLE, la ligne FE, ou l'apotème de la face triangulaire de l'icosaèdre, sera aussi le reste de la division requise du rayon IF de la sphère inscrite. Conservant la signification des caractères employés ci-dessus, on a donc

$$t = \frac{3 - \sqrt{5}.r}{2}; \quad \text{et} \quad \rho = 3 - \sqrt{5}.r$$

comme pour le dodécaèdre. Le côté AB devient égal à

$$\rho\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad r\sqrt{42 - 18\sqrt{5}}.$$

L'aire du triangle

$$= \frac{3}{4}\sqrt{3}.\rho^2 \text{ ou } \sqrt{3}\left(\frac{21 - 9\sqrt{5}}{2}\right).r^2 \text{ ou } \sqrt{\frac{1269 - 567\sqrt{5}}{2}}.r^2.$$

Le volume de l'icosaèdre $= \sqrt{3}(70 - 30\sqrt{5})r^3$

Le rayon de la sphère circonscrite $= r\sqrt{15 - 6\sqrt{5}}$ comme dans le dodécaèdre.

Notes sur la texture de la cornée transparente, par M. Fohmann, Professeur à l'Université de Liége.

L'on sait généralement que la cornée est une membrane d'une nature particulière, et qu'elle se distingue par sa tex-

ture des autres membranes de l'œil. Ses deux faces sont tapissées par la conjonctive et par la membrane de *Descemet;* la première est tellement confondue avec elle, qu'on ne peut l'en séparer, la seconde en peut être facilement détachée surtout chez les grands animaux.

Pour ce qui regarde la structure de la cornée, on la fait consister en plusieurs lamelles, qui paraissent formées par du tissu cellulaire, et unies entre elles par le même tissu. Pour moi, je n'ai jamais considéré la séparation de cette membrane en plusieurs lamelles que comme une formation artificielle de couches, qui, suivant la dextérité du préparateur, peuvent varier en nombre. Il est vrai que l'on voit presque toujours que la division de la cornée (abstraction faite de la membrane de *Descemet*) en deux couches est la plus facile à opérer; c'est un fait que nous expliquerons plus tard par la texture de cette membrane.

Occupé depuis bon nombre d'années à faire des recherches sur le système des vaisseaux absorbans de l'homme et des animaux, je suis parvenu à montrer les dernières ramifications de ces vaisseaux dans les organes, ou leur origine, par des injections faites avec le mercure, comme on fait connaître les vaisseaux sanguins par l'injection d'autres substances. J'ai trouvé que les vaisseaux lymphatiques ou absorbans existent en beaucoup plus grand nombre qu'on ne l'a cru jusqu'aujourd'hui. Ainsi, j'ai vu dans des parties dont les vaisseaux sanguins avaient été injectés d'une manière très-heureuse, que la masse non injectée, que l'on prend ordinairement pour du tissu cellulaire, n'est rien autre qu'un lacis de vaisseaux lymphatiques. En effet, lorsque l'injection de ces vaisseaux lymphatiques vient à réussir, cette masse se métamorphose bientôt en vaisseaux absorbans : c'est ce que j'ai observé chez l'homme et chez les animaux dans les muscles, dans plusieurs membranes fibreuses, dans la peau, dans les muqueuses et les séreuses, ainsi que dans les parties qui leur sont sous-jacentes.

Pour rendre apparens par les injections les vaisseaux lymphatiques de ces parties, j'enfonce une lancette très-étroite ou

un scalpel de cette forme dans différens endroits et par ces ouvertures, je tâche d'introduire le mercure, à l'aide d'un tube très-fin.

Les vaisseaux lymphatiques se trouvant en quantité innombrable dans le parenchyme des organes, où ils affectent la forme de réseaux, l'on conçoit que la pointe de la lancette perce plusieurs de ces vaisseaux, qui, ne possédant pas de valvules, se remplissent de mercure dans un trajet plus ou moins long, lorsque l'on vient à introduire ce métal.

Par ce procédé, j'ai non-seulement injecté les vaisseaux lymphatiques des parties dont je viens de parler, mais aussi j'ai découvert cette espèce de vaisseaux, chez des animaux et dans des organes où jusqu'à nos jours on a nié leur existence. Ainsi la sèche (*sepia octopus*) dans la classe des invertébrés, le placenta et le cordon ombilical de l'homme et des animaux, plusieurs membranes de l'œil et principalement la cornée transparente, m'ont offert ces vaisseaux.

Et qu'on ne me fasse pas le reproche d'être tombé dans la même erreur que *Mascagni*, qui, armé de son microscope, ne voyait presque partout que vaisseaux lymphatiques. On se hâta trop de rejeter les doctrines de ce grand homme, et de les déclarer fausses. Si *Mascagni* s'est trompé pour quelques parties, il n'en a pas moins bien reconnu la grande part que prennent les vaisseaux lymphatiques dans la texture des organes. Les preuves que je puis apporter à l'appui de cette assertion ne me manquent pas; car ce que *Mascagni* a dit avoir vu à l'aide du microscope, je le montre par des injections de mercure, de sorte que l'on peut se convaincre, par la vue, de la validité de ce que j'avance.

Je me propose de faire paraître incessamment un ouvrage sur ce sujet. Les dessins sont depuis long-temps entre les mains du graveur, qui malheureusement tarde à achever son travail.

Après cette digression, je reviens à l'objet qui a donné lieu à ces notes : la structure de la cornée.

Comme je l'ai dit plus haut, ce n'est que par art et forcé-

ment que l'on partage la cornée en plusieurs lamelles. Je dois ajouter ici que c'est par erreur que l'on fait consister ces couches et leur moyen de réunion, en tissu cellulaire. « La cornée est presque exclusivement formée par des réseaux de vaisseaux lymphatiques. »

Si l'on introduit une lancette étroite dans la cornée de l'homme ou des animaux vertébrés, et que l'on pousse doucement avec le manche du scalpel le mercure que l'on a injecté, on voit un grand nombre de vaisseaux lymphatiques se remplir de cette substance, et enfin la cornée entière se changer en ces vaisseaux. Quant à leur grosseur, on la voit diminuer à mesure qu'ils approchent de la circonférence et des deux faces de la cornée. Dans le milieu de cette membrane, ils sont plus développés, ils y forment souvent des vésicules ou cellules; ce qui s'observe ordinairement chez les ruminans. Il semble résulter de cette disposition particulière, que les déchirures et les extravasations y ont plus souvent lieu qu'aux autres parties de la cornée. C'est aussi de cette disposition que paraît dépendre la facilité avec laquelle se fait ordinairement la division de la cornée en deux lamelles.

La lymphe qui s'écoule alors, n'est pas contenue entre les feuillets, comme on l'a dit jusqu'à présent, mais elle provient des plus grosses branches des vaisseaux lymphatiques ou de leurs dilatations qui ont été déchirées par cette séparation.

Ce qui concerne le développement des vaisseaux lymphatiques de la cornée, on les trouve comme dans les animaux inférieurs et comme dans le parenchyme des organes, c'est-à-dire, qu'ils ne montrent que de petits rétrécissemens par-ci par-là, ou même des rudimens de valvules qui n'empêchent cependant par le cours de la lymphe ni du mercure dans différentes directions.

Les vaisseaux de la face externe de la cornée sont remarquables par leur finesse extraordinaire; elle est si grande que la meilleure loupe peut à peine les rendre visibles. Ceux qui se trouvent à la face qui est revêtue par la membrane de *Descemet,* sont un peu plus forts; ce qui peut être regardé comme

la cause des déchirures et des extravasations qui y ont plus souvent lieu qu'à la face externe.

Il est encore à remarquer que les vaisseaux lymphatiques de la cornée paraissent plus développés et contenir plus de lymphe dans la jeunesse que dans un âge plus avancé. C'est de cette manière d'être des vaisseaux que semble dépendre l'épaisseur plus grande et l'élasticité plus prononcée dont jouit la cornée des nouveau-nés. Si l'on presse entre les doigts la cornée d'un jeune sujet, elle perd de son épaisseur et prend un aspect fané; parce que la lymphe à laquelle elle doit en grande partie sa transparence, en a été exprimée. Si on la met dans l'eau, elle recouvre bien son épaisseur et son élasticité primitives; mais plus sa transparence.

Enfin, pour les rapports des vaisseaux lymphatiques de la cornée avec les autres membranes de l'œil, avec lesquelles elle est en contact, on les voit se continuer aux faces interne et externe de la sclérotique et même pénétrer dans la substance de cette membrane. A la face externe de l'œil, les vaisseaux lymphatiques se confondent en partie avec le réseau des vaisseaux absorbans qui fait la base de la conjonctive et forment en partie des ramuscules qui rampent entre cette membrane et la sclérotique. Les branches qui pénètrent dans le parenchyme de la sclérotique, y rencontrent les nombreux vaisseaux absorbans dont elle est pourvue et se confondent avec eux, tandis que celles qui se rendent de la face interne de la cornée à la sclérotique, s'abouchent dans le canal de Fontana.

Je crois que le canal de Fontana n'est rien autre qu'une veine; car, lorsqu'on réussit à bien injecter les artères de l'œil, avec une masse fine composée de thérébentine et de vermillon, ou dichtyocolle et de cette substance colorante, l'on voit ordinairement la matière de l'injection passer dans ce canal. Il apparaît alors en forme d'un anneau rouge, situé chez l'homme entre le ligament ciliaire et une légère empreinte de la sclérotique qui correspond à ce ligament. Chez les animaux, ce canal se trouve ordinairement dans le ligament ciliaire même et divisé en plusieurs branches. Au canal de Fontana correspond un

pareil anneau à la face externe de l'œil, chez l'homme et chez les animaux. Cette disposition se montre clairement dans l'œil du bœuf. A cette face et à l'endroit où la cornée touche la sclérotique, se trouve cet anneau veineux accompagné de vaisseaux artériels. Dans cette veine comme dans le canal de Fontana, s'abouchent grand nombre de vaisseaux lymphatiques de la cornée.

En injectant les vaisseaux lymphatiques de la cornée d'après le procédé que j'ai indiqué ci-dessus, l'on trouvera que le passage du mercure des vaisseaux lymphatiques dans ces deux veines circulaires est le résultat ordinaire. Si l'on pousse le mercure avec le manche du scalpel vers le bord de la cornée, on le voit plus souvent entrer dans les veines que passer dans les branches des vaisseaux lymphatiques.

Par cette disposition s'explique un fait que j'ai souvent observé; mais dont je n'avais pu me rendre raison : c'est que dans les yeux des ruminans, l'on voit souvent les veines de la face externe de la cornée contenir une lymphe claire, après la mort. Il semblerait que la lymphe est encore versée dans les veines, lorsque le sang artériel a déjà cessé d'y passer.

Si l'on me demande quelle est la source de la lymphe que contiennent les vaisseaux absorbans de la cornée; je répondrai qu'elle est en partie amenée par voie d'absorption de la chambre antérieure de l'œil, et en partie exhalée par les artérioles qui se répandent dans le parenchyme de cette membrane.

Si j'ai dit plus haut que la cornée ne semble consister presque en entier qu'en un lacis de vaisseaux lymphatiques, c'est relativement aux vaisseaux sanguins qui entrent encore dans sa structure.

L'on sait que les opinions varient sur l'existence de ces vaisseaux dans la masse cornéenne. Par les injections les mieux faites des artères du globe de l'œil, je n'ai jamais vu cette espèce de vaisseaux entrer dans la cornée. Seulement, dans ces derniers temps, lorsque la structure de cette partie m'a été mieux connue, et que j'ai eu remarqué la disposition des vaisseaux sanguins à la face externe du globe de l'œil, il m'est

venu à l'idée d'injecter par le mercure les artères et les veines de cette partie, pour voir si cette substance poussée par le manche du scalpel n'entrerait pas dans des vaisseaux pénétrans dans la cornée. Après plusieurs tentatives, je vis entrer le mercure dans des branches fines qui se jettaient dans la substance de la cornée.

Après ces esquises sur la structure de la cornée à l'état normal, je dirai encore un mot sur quelques changemens qu'elle subit par suite d'affections morbides ou d'un âge très-avancé. Cette membrane qui, dans le fait, montre la même texture que les séreuses, qui, comme elle, ne sont formées en grande partie que des vaisseaux lymphatiques, est sujette aux mêmes altérations que ces membranes : tels que les épaississemens, la perte de transparence. La cornée paraît devoir sa transparence à l'état normal des vaisseaux lymphatiques et à la lympidité de la lymphe que ceux-ci contiennent. Si les vaisseaux viennent à s'oblitérer, l'on voit paraître des taches blanches et opâques, comme on en observe souvent dans les séreuses, à la suite des inflammations.

Il existe chez les chevaux un état de cécité qui résulte du trouble de la cornée qui prend une couleur blanchâtre.

Dans ce cas, il ne m'est jamais arrivé de pouvoir injecter les vaisseaux lymphatiques de cette membrane. Je pense qu'alors ils n'existent plus, mais sont dégénérés ou oblitérés par suite d'une inflammation.

Les taches de la cornée paraissent plus souvent à la face externe qu'à la face interne, parce que les vaisseaux qui s'y trouvent étant plus fins, sont aussi plus disposés à s'oblitérer.

L'anneau blanc grisâtre qu'offre l'œil des vieillards au bord de la cornée (*annulus senilis*) paraît aussi devoir son existence à l'oblitération des vaisseaux absorbans qui, dans cet endroit, sont d'une finesse extrême. Au moins j'ai tenté inutilement d'injecter les vaisseaux lymphatiques à cet endroit, probablement parce qu'ils n'existent plus.

Sur l'action réciproque entre un courant électrique et des aiguilles d'acier non aimantées, par M. Gloesener, Professeur extraordinaire à l'Université de Liége.

En étudiant les phénomènes électro-magnétiques, on est bientôt conduit à reconnaître que, pour les expliquer d'une manière générale, il faut ou supposer dans le conducteur galvanique une force révolutive en un sens déterminé, laquelle produit des actions opposées sur les deux pôles d'un aimant, ou bien attribuer tout le magnétisme à des courans électriques perpendiculaires à l'axe de chaque particule, et en même temps perpendiculaires à la ligne qui joint les deux pôles d'un aimant.

Mais laquelle de ces deux hypothèses est conforme à la nature? On sent combien il est difficile de décider cette question, l'une d'elles étant en quelque sorte l'inverse de l'autre; et personne, que je sache, n'a encore publié des faits que l'on ne puisse expliquer de deux manières. M'étant occupé de la solution de cette question, j'ai réussi à faire quelques expériences par lesquelles le problème me semble être complétement résolu. Mes recherches sont en partie déposées à l'*Académie de Bruxelles* depuis plus de 15 mois; elles ont aussi été accueillies avec intérêt par les *Académies* de *Metz* et de *Nancy;* et jointes à quelques autres recherches, elles m'ont valu le titre de membre correspondant de ces deux corps savans.

Je pense donc que ces recherches sont assez intéressantes pour être publiées successivement dans la *Correspondance Mathématique et Pysique.*

J'ai pris des aiguilles d'acier, et je m'assurai qu'elles n'étaient pas aimantées; au moyen de fils de soie non tordue je les suspendis horizontalement l'une derrière l'autre dans lemême plan vertical (*voy. fig.* 8). Par le conducteur vertical *cd* placé dans le même plan, je fis monter ou descendre un courant électrique, et je

vis constamment les deux aiguilles se mettre en mouvement, mais de manière que les extrémités B et A′ se dirigeaient constamment en sens contraire l'une de l'autre. Pour m'assurer que ce mouvement était dû au courant électrique, je changeai la direction du courant, et le mouvement des aiguilles fut toujours contraire à celui qui eut lieu dans le premier cas.

Des mouvemens contraires furent également imprimés aux extrémités B et A′ par une forte décharge électrique passant par le conducteur *cd*.

De ces expériences répétées plusieurs fois il faut conclure : que le courant vertical imprime à l'extrémité B le même pôle qu'à l'extrémité A′ ; puisque, s'il se trouvait un pôle sud en B et un pôle nord en A′ ou réciproquement, les extrémités B et A′ se mouvraient conformément à l'expérience, dans le même sens.

De là il suit que le courant développerait dans l'aiguille AB des courans ayant des directions contraires à celles des courans qu'il développerait dans l'aiguille A′B′, tandis que, placé d'une manière symétrique par rapport aux deux aiguilles, il devra nécessairement agir sur l'une précisément de la même manière que sur l'autre, parce que le courant doit certainement agir pour développer d'autres courans dans les aiguilles, comme il agirait si ceux-là étaient déjà développés.

Voilà donc un fait positif inexplicable dans l'hypothèse que le magnétisme est dû à des courans électriques ; mais ce n'est pas le seul.

En plaçant une aiguille non aimantée AB au-dessus du multiplicateur électro-magnétique *cd* parallèlement à lui (*voy. fig.* 9), on la verra se mettre en mouvement et faire avec le conducteur un angle dont la grandeur dépendant de l'intensité du courant, varie entre les limites 0° et 90°.

Or, si des courans électriques étaient la cause physique du magnétisme, il faudrait, d'après la théorie, qu'il se développât dans l'aiguille des courans parallèles à ceux du multiplica-

teur, et dirigés, sur la face voisine, dans le même sens qu'eux. L'expérience n'est donc pas d'accord avec la théorie des courans, dont l'auteur admet lui-même que dans une aiguille parallèle au conducteur, les courans développés devraient être parallèles à celui du conducteur durant toute l'expérience ; ce qui supposerait que l'aiguille restât en repos, c'est-à-dire ce qui supposerait le contraire de ce qui a lieu réellement.

Pour que dans les expériences 1 et 2 le magnétisme se développe avec facilité, on pourra, à défaut d'une pile galvanique énergique, employer des aiguilles d'acier doux, puisqu'on ne veut qu'en observer les mouvemens durant les expériences.

Je roulai du fil d'acier ou de fer écroui autour d'un bouchon de liége cylindrique de 4 à 5 lignes de diamètre; je fis passer par une rainure pratiquée sur le bouchon, par exemple près de A, si NASBN représente une des spires de la spirale (*fig.* 10), un conducteur isolé, lequel, communiquant avec les extrémités d'une pile galvanique, développa deux pôles également éloignés de lui par exemple en NAS.

Cela fait, je fis passer le conducteur par une rainure près de B, diamétralement opposée à la première; et je vis, après l'expérience, les pôles renversés de manière que le pôle N prit la place du pôle S, ou réciproquement.

Dans cette expérience, le courant électrique a dû, d'après la théorie, développer des courans dirigés dans le même sens 1° sur toute la face intérieure de la spirale : 2° des courans dirigés également en même sens, mais ayant des directions contraires à celles des courans sur toute la face extérieure de la spirale.

Mais le conducteur, placé d'abord près de A, a agi sur la moitié la plus voisine NAS plus fortement que sur la plus éloignée NBS. Au contraire, placé près de B dans le second cas, le conducteur, conservant sa première direction, a dû renforcer les courans dans la moitié NBS, et maintenir ceux en NAS dans leurs directions; delà il faut conclure que, l'expérience terminée, et chaque spire décomposée en un

anneau, et une portion rectiligne infiniment petite, la spirale devrait agir comme un petit aimant rectiligne, et une multitude d'anneaux d'acier aimantés.

Or, ceux-ci ne pouvant, conformément à la théorie des courans, produire aucune action au-dehors, on ne pourra nullement expliquer pourquoi la spirale agit comme des aimans transversaux.

Si l'on choisit, pour faire l'expérience, des anneaux en acier qui ne soit pas trop dur, on observera le même phénomène.

Les trois expériences que je viens de décrire prouvent d'une manière, me semble-t-il, convainquante, que les forces magnétiques ne peuvent être identiques avec des courans électriques perpendiculaires aux axes des aimans, et en même tems perpendiculaires aux axes de chacune de leurs particules. — On verra par la suite plusieurs autres phénomènes qui confirmeront la même conclusion.

Nouvelles et Annonces scientifiques.

— L'Académie royale de sciences de Paris a publié depuis peu le rapport qui lui a été fait par M. *Poisson* sur l'ouvrage de M. *Jacobi*, intitulé : *Fundamenta nova Theoriæ Functionum Ellipticarum*. Nous signalons à l'attention des mathématiciens qui ne le connaîtraient point encore, cet intéressant mémoire d'un des plus illustres géomètres français, sur un des ouvrages les plus remarquables de notre époque.

— Le même corps savant à fait paraître le tome IX de ses mémoires, dans lequel on trouve différens écrits mathématiques et physiques de MM. *Poisson*, *Cauchy*, *Navier*, *Puissant*, *Savart*, *Bequerel* et *Girard*.

— Nous croyons pouvoir annoncer comme très-prochaine

la publication du travail de M. *Plana* sur la théorie de la lune, qui se composera de trois forts volumes in-4°.

Nous publierons dans le volume suivant un mémoire que ce savant a bien voulu nous confier sur la théorie des caustiques considérées comme développées d'autres courbes.

Nous y donnerons aussi un mémoire de M. *Encke* de Berlin, et différens articles de savans nationaux et étrangers, dont la publication a été différée par suite de la révolution Belgique.

— Les lecteurs de la *Correspondance* qui ont suivi nos événemens politiques, recevront sans doute avec intérêt quelques renseignemens sur le sort des mathématiciens de ce pays, qui ont pris plus ou moins part à la rédaction de ce recueil. Nous désirerions n'avoir point à regretter toutes les pertes qu'a faites l'enseignement ; les trois professeurs de mathématiques de nos universités ont cessé leurs fonctions : M. *Garnier* a été admis à la pension de retraite, et MM. *Van Rees* et *Goebel* ont quitté ce pays, MM. *Dandelin*, *Timmermans* et les frères *Groetaers* ont pris service dans le génie, et M. *Hayez* dans l'artillerie. M. *Delanoy* est resté sans place par suite de la suppression de l'école militaire de Bréda, où il était professeur. Les deux facultés de sciences de Gand et de Louvain ont été supprimées, et MM. *Pagani*, *Lemaire* et *Gloesener* ont été envoyés à Liége avec le titre de professeur extraordinaire qu'ils avaient précédemment. M. *Lévy*, qui d'abord avait quitté ce pays pour passer à l'école Normale de France, vient d'être rappelé comme professeur ordinaire à la satisfaction de tous les amis des sciences.

— Nous avons annoncé les premières livraisons des principes de mécanique appliquée, *Gronden der toegepaste Werktuigkunst*, etc., que M. *Verdam* publie à l'usage des industriels. Cet ouvrage, qui contient des développemens très-étendus, continue à paraître avec régularité. Six sections ont été publiées jusqu'à présent. La première renferme, sous forme d'*introduction*, les élémens de géométrie; trois autres formant la première partie de l'ouvrage, exposent les principes de

la mécanique, la théorie pratique des machines simples et l'appréciation de la force des différentes parties des machines; les deux dernières forment la deuxième partie du traité, et contiennent des notions sur les roues dentées, la composition des machines et les moyens de changer les différentes espèces de mouvemens rectilignes, circulaires, etc. Les nombreuses applications que présente l'auteur, et la clarté avec laquelle il expose tout ce qui tient à la théorie, recommandent son travail et en assureront le succès.

— Dans le cahier précédent de la *Correspondance*, nous avons parlé d'expériences curieuses de M. *Moll* sur la force magnétique que peuvent prendre des barreaux de fer doux sous l'influence des courans électriques, et de quelques essais que nous avions faits avec MM. *Lipkens* et *Onderdewijngaart Cantius*. Ces essais ont été repris depuis avec plus de succès, et nous sommes parvenus à faire porter plus de 33 kilog. à un fer semblable à celui qu'avait employé M. *Moll*. Comme les expériences que nous avons faites avaient pour but encore une autre recherche, nous les exposerons avec plus de détail dans un des cahiers suivans.

— Nous venons d'avoir été témoin à Bruxelles, dans la soirée du 7 janvier, d'une belle aurore boréale.

QUESTION.

Étant donnés deux systèmes de diamètres conjugués et un point d'une conique, déterminer la courbe.

Fig. 8

Fig. 10

Fig. 9

Lith. de VandenBurggraaff

TABLE

DES MATIÈRES DU SIXIÈME VOLUME.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Géométrie.

Analise.

Géométrie analitique.

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

Géométrie.

Analise.

Mécanique analitique.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

Astronomie.

Physique.

Météorologie.

Statistique.